

Решения задач второго дня

5. (Р. Женодаров) Можно ли вместо звёздочек вставить в выражение $\text{НОК}(*, *, *) - \text{НОК}(*, *, *) = 2009$ в некотором порядке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным?

Решение. Наименьшее общее кратное (НОК) нескольких чисел делится на каждое из них и, следовательно, на каждый их делитель. Значит, если среди чисел, от которых находят НОК, есть чётное, то НОК тоже будет чётным. Разность двух чётных чисел — число чётное, а 2009 — нечётное. Значит, если такие шесть последовательных натуральных чисел существуют, то все чётные числа среди них должны быть в одном НОКе. Среди шести последовательных натуральных чисел три чётных и три нечётных, значит, один НОК будет находиться от трёх последовательных чётных чисел, а другой — от трёх последовательных нечётных чисел. Но среди трёх последовательных как чётных так и нечётных чисел есть кратное трём. Но тогда оба НОКа кратны трём, и их разность делится на 3. Но 2009 на 3 не делится. Значит, таких шести последовательных натуральных чисел не существует.

6. (С. Берлов) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнены соотношения $AB = BD$; $\angle ABD = \angle DBC$. На диагонали BD нашлась точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KAD = \angle KCD$.

Решение. Отложим на стороне AB отрезок $BE = BC$. Равнобедренные треугольники EBC и KBC равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $EC = KC$, а

$$\angle AЕК = 180^\circ - \angle BEК = 180^\circ - \angle BКC = \angle СКD.$$

Кроме того, $KD = BD - BK = BA - BE = EA$. Следовательно, треугольники $AЕК$ и DKC равны. Далее, поскольку оба треугольника $BEК$ и BAD — равнобедренные, $\angle BEК = 90^\circ - \angle EBD/2 = \angle BAD$. Поэтому $AD \parallel EK$, откуда $\angle KAD = \angle EКА = \angle KCD$.

7. (И. Рубанов, А. Шаповалов) На столе лежит 10 кучек с 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 орехами. Двое играющих берут по очереди по одному ореху. Игра заканчивается, когда на столе останется 3 ореха. Если это — три кучки по одному ореху, выигрывает тот, кто ходил вторым, иначе — его соперник. Кто из игроков может выигрывать, как бы не играл соперник?

Решение 1. Назовем кучки из одного ореха единицами, а из двух — двойками. Первый должен придерживаться следующих правил: 1) если на доске есть единицы — убрать одну из них; 2) не брать из двоек. В остальном ходы первого могут быть любыми. Заметим, что число орехов в начале игры нечетно, значит, оно нечетно и перед любым ходом первого. Поэтому перед его ходом на доске всегда будет хотя бы одна нечетная кучка, то есть первый всегда сможет сделать ход, не нарушая описанных правил. Теперь заметим, после первого хода первого на доске нет единиц. После хода второго может появиться не более одной новой единицы, которую первый заберет. Значит, и после следующих ходов первого единиц на доске не будет, а по-

сле любого хода второго на доске будет не больше одной единицы. В частности, так будет и в конце игры, то есть первый выиграет.

Решение 2. Выигрывает первый. Каждым ходом он берет орех из самой маленькой кучки. Тогда после 15-го хода первого исчезнут не менее 5 кучек. И так после ответного хода второго останется 15 орехов и не более 5 кучек. Если кучек ровно 5, то в наименьшей не больше 3 орехов. Поэтому еще через 3 хода первого и второго останется 9 орехов и не более 4 кучек. Если кучек ровно 4, то в наименьшей не более 2 орехов. Еще через 2 хода останется 5 орехов и не более 3 кучек. Если кучек ровно 3, то в наименьшей 1 орех. Взяв его, первый оставит всего 2 кучки и выиграет.

8. (И. Богданов) *На бесконечной ленте выписаны в ряд числа. Первой идёт единица, а каждое следующее число получается из предыдущего прибавлением к нему наименьшей ненулевой цифры его десятичной записи. Сколько знаков в десятичной записи числа, стоящего в этом ряду на $9 \cdot 1000^{1000}$ -ом месте?*

Ответ: 3001. **Решение.** Поскольку каждое число ряда, начиная со второго, больше предыдущего хотя бы на единицу, $9 \cdot 1000^{1000}$ -ое его число больше $9 \cdot 1000^{1000}$, то есть в нём как минимум 3001 цифра. Обозначим n -ое число ряда через a_n , и пусть k — наименьший номер такой, что в числе a_k 3002 цифры. Если мы докажем, что $k > 9 \cdot 1000^{1000}$, то получим, что в $9 \cdot 1000^{1000}$ -ом числе ряда не более 3001 цифры, то есть в нём ровно 3001 цифра.

Рассмотрим числа от 0 до $10^{3001}-1$, не имеющие единиц в десятичной записи. Дополнив каждое слева нулями до 3001 знака, мы получим все последовательности длины 3001 из цифр, отличных от единицы. Таких последовательностей 9^{3001} . Значит, и среди чисел a_1, \dots, a_{k-1} не более 9^{3001} чисел, не имеющих единицы в десятичной записи (так как все они не превосходят $10^{3001}-1$).

Рассмотрим теперь процесс получения числа a_k из a_1 . На каждом из $k-1$ шагов прибавляется число от 1 до 9, причём количество шагов, на которых прибавляется не единица, не превосходит 9^{3001} . Значит,

$$10^{3001}-1 \leq a_k - a_1 \leq 9 \cdot 9^{3001} + 1 \cdot (k-1-9^{3001}) = k-1+8 \cdot 9^{3001},$$

откуда $k \geq 10^{3001}-8 \cdot 9^{3001}$. Осталось показать, что $10^{3001}-8 \cdot 9^{3001} > 9 \cdot 10^{3000}$. Для этого достаточно доказать, что $9^{3002} < 10^{3000}$. Заметим, что $9^7 = 4782969 < 5 \cdot 10^6$, откуда $9^{28} < 5^4 \cdot 10^{24} < 10^{27}$ и $9^{56} < 10^{54}$. Поэтому $9^{3002} = 9^{56} \cdot 9^{2946} < 10^{54} \cdot 10^{2946} = 10^{3000}$.