ВАРИАНТ 1 верные ответы отмечены знаком «+», неверные – знаком «–».

1. В коробке лежало 3 белых шарика и 9 черных. Толя положил туда еще 5 таких же шариков, каких именно цветов неизвестно. Какие из приведенных ниже утверждений обязательно будут ложны?

Ответы:

1) В коробке не менее 10 черных шариков. (–)
2) В коробке черных и белых шариков поровну. (+)
3) Черных шариков меньше белых (+)
4) Разница между количеством черных и белых шариков четна. (+)
5) Разница между количеством черных и белых шариков кратна трем. (–)

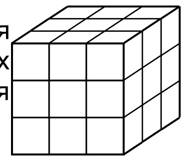
2. В параллелограмме ABCD на стороне BC выбраны точки K и M так, что AM – биссектриса угла BAD, DK – биссектриса угла ADC. Известно, что AB = 3см, а KM = 2см. Чему могут быть равны стороны параллелограмма?

Ответы:

А) 3см и 4см (+) Б) 3см и 5см (–) В) 3см и 6см (–) Г) 3см и 7см (+) Д) 3см, длина второй стороны – произвольная (–)

Решение. Возможны два варианта расположения точек K и M на стороне BC: 1) B-K-M-C (тогда длины 3 и 4) и 2) B-M-K-C (тогда длины 3 и 7).

3. Белый куб размером 3x3x3 составлен из белых кубиков размером 1x1x1 (см.рис.) Петя разобрал этот куб и какие-то 54 грани выкрасил в синий цвет. Сколько теперь синих снаружи кубов гарантированно можно составить из полученных кубиков? (разрешается использовать не все кубики)



Ответы:

А) ни одного (+) Б) не больше одного куба 2x2(+) В) всегда хотя бы один (–) Г) как минимум два куба (–) Д) три и более (–)

Решение. Если покрашены ровно по две грани каждого кубика (их 27), то очевидно, что ни одного кубика собрать не удастся, поскольку не будет ни одного синего углового кубика.

4. Двузначное число *N* умножили на 2, у результата поменяли местами цифры и поделили на 2. Получили то же самое число *N*. Сколько существует таких чисел *N*?

Ответы:

А) ни одного (–) Б) ровно 4 (–) В) не менее 10 (+) Г) не менее 14 (+) Д) не менее 15 (–)

Решение. Так в результате получилось то же самое число, то поменяли местами две одинаковые цифры. Это значит, что у 2N должны быть две такие цифры. Рассмотрим несколько случаев:

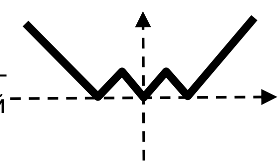
1) При умножении на 2 не было перехода через разряд. Очевидно, что в качестве N подходят числа 11, 22, 33, 44 и только они.
2) При умножении на 2 был переход через десяток в разряде десятков. Тогда первая цифра числа 2N равна 1. Последняя цифра всегда четная. Заметим, что если при умножении был переход через десяток в разряде единиц, то у 2N четной будет только последняя цифра (число единиц). Значит, в этом случае 2N = 11∗, то есть N может быть равно 55, 56, 57, 58 или 59.
3) Пусть теперь был только переход через десяток в разряде десятков. Тогда число 2N имеет две одинаковые четные последние две цифры. То есть 2N равно 100, 122, 144, 166 или 188. Тогда N равно 50, 61, 72, 83 или 94.

Таким образом, всего различных вариантов 14 чисел.

5. Сколько решений может иметь уравнение $|||x - a| - 1| - 1| = |b|$?

Ответы:

А) 2 (+) Б) 3 (+) В) 4 (+) Г) 5 (–) Д) 6 (+)



Решение. График функции $y = |||x| - 1| - 1|$ изображен на рисунке. График $y = |||x - a| - 1| - 1|$ получается сдвигом вдоль оси X и на пересечение с любой параллельной оси X прямой не влияет. График, изображенный на рисунке, может пересекать горизонтальную прямую $y = |b|$ в двух, трех, четырех или 6 точках.

6. Сколько существует пар простых (не обязательно различных) чисел (p;q) таких, что p^q-pq также простое?

Ответы:

А) как минимум одна (+) Б) не меньше двух (+) В) не меньше трех(–) Г) ни одной(–) Д) бесконечно много(–)

Решение.

p^q-pq делится на p, значит, для того чтобы это выражение было простым числом необходимо, чтобы p^q-pq=p, откуда p^{q-1}-q=1. Следовательно, p и q - разной четности, поэтому одно из них равно 2. Если q=2, p^1-2=1 , p=3. Если p=2, то 2^{q-1}=q+1. Верно неравенство 2^{q-1}>q+1 при q>3. Осталось проверить q=3.

Ответ: p=2, q=3; p=3, q=2.

7. На шахматной доске 6х6 стоит 9 ладей. Какое количество «небитых» клеток может оказаться на доске?
Ответы:
А) 9 (+) Б) 8 (–) В) 6 (+) Г) 4 (+) Д) 1 (+)

Решение. Если ладьи стоят в k вертикалях и m горизонталях, то свободны (6-k)(6-m) клеток. 9 ладей нельзя уместить менее, чем в 2 горизонтали и менее, чем в 2 вертикали. Более того, уместить их в прямоугольник 4х2 тоже нельзя. Следовательно, каждый из множителей не превосходит 3. Все остальные варианты возможны, а именно может быть свободными 9, 6, 4, 1 и 0 клеток.

8. На стороне *AB* прямоугольника *ABCD* взяли точку *L*, а на сторонах *AD* и *BC* – точки *M* и *N* такие, что лучи *LM* и *LN* разбили развернутый угол *ALB* на три равных угла. Окружность с диаметром *MN* пересекает эти лучи в точках *E* и *F*. Что больше: *EL* + *LF* или *AB* ?
Ответы:
А) *EL* + *LF* больше *AB* (–) Б) *EL* + *LF* больше или равно *AB* (+) В) *EL* + *LF* меньше или равно *AB* (+) Г) *EL* + *LF* меньше *AB* (–) Д) *EL* + *LF* равно *AB* (+)

Решение. угол LNF=LME = 30° , значит LE=1/2 LM, LF=1/2 LN.
В свою очередь в треугольниках ALN и BLM AL = ½ LN, а BL = ½ LM

9. При каком *n* на плоскости можно отметить 2*n* различных точек так, чтобы для любого натурального *k* от 1 до *n* существовала прямая, содержащая ровно *k* отмеченных точек?
Ответы:
А) при n меньше 6 (+) Б) при n= 6 (+) В) при n меньше 7 (+) Г) при любом n (–) Д) ни при каком n (–)

ВАРИАЦИЯ. При каком *n* на плоскости можно отметить *n* различных точек так, чтобы для любого натурального *k* от 1 до 17 существовала прямая, содержащая ровно *k* отмеченных точек?
Ответы:
А) при любом n больше 17 (–) Б) при любом n больше 80 (+) В) при любом n больше 100 (+) Г) при любом n (–) Д) ни при каком n (–)

Решение.
Если k > 4, то должны быть различные прямые с k, k-1 и k-2 точками. Эти прямые могут пересекаться только по трем точкам, то есть быть сторонами некоторого треугольника. Таким образом потрачено уже k + (k-2) + (k-4) точки. Чтобы иметь возможность провести следующую прямую, необходимо отметить как минимум еще k-6 точек, так как все уже поставленные расположены на трех прямых и любая другая прямая пересекает их не более чем по трем точкам. И так далее. Следовательно, минимальное количество точек для существования прямых, проходящих ровно через 1,2, … , k точек есть сумма $\sum_{t\le\frac{k}{2}}(k-2t)$. Эта сумма равна $\frac{k^2+2k}{4}$ для четного k и $\frac{(k+1)^2}{4}$ для нечетного. Для k=3 достаточно 4 точек, для k=2 – двух, k=1 – одной, что, очевидно, укладывается в приведенные выше формулы.
Для 2008 минимальное количество точек равно 1009020.
Для 100 – 2550. Для 10 – 30. Для 17 – 81.

10. Ваня, Костя и Лёша играют в игру: на столе лежит 2008 спичек, за один ход Ваня и Лёша могут взять 1 или 2 спички, Костя – 1, 2 или 3. Первым ходит Ваня, вторым – Костя, третьим – Лёша. Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку. Какие два игрока могут объединить свои усилия против третьего, чтобы не дать ему выиграть?
Ответы:
А) Ваня и Костя (+) Б) Костя и Лёша (+) В) Ваня и Лёша (–) Г) Костя всегда выигрывает (+) Д) никаким двум это не удастся (–)

Решение. Покажем, что любая компания с Костей всегда выигрывает. Заметим, что любые два игрока вместе за один круг (каждый ходит по одному разу) могут взять любое количество спичек от 2 до 4. Если третий может взять только 1 или 2, то объединившиеся двое могут обеспечить за один круг взятие 5 спичек. Тогда, если объединились Ваня и Костя, то первым ходом Ваня с Костей берут 4 спички, а далее за каждый круг, начинающийся с Лёши, дополняют взятое Лёшей количество спичек до 5. Получив в конце 4 спички, Лёша проигрывает. Аналогично, если объединились Костя и Лёша. После первого хода Вани они делают количество спичек на столе равным 2004 и выигрывают как в первом случае. Пусть теперь Ваня и Лёша объединились против Кости. Поскольку Костя может также взять и 3 спички, то любое взятое Ваней и Лёшей суммарно количество спичек Костя может дополнить до 5. Поэтому своим первым ходом он дополняет взятое Ваней число до 3 и далее играет, дополняя до 5, пока не заберет последнюю спичку.
(Замечание: для решения задачи достаточно показать, что Костя всегда выигрывает независимо от того, объединились другие двое или нет)