Решения задач 1 традиционного тура олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *В озере водятся караси, окуни и щуки. Два рыбака поймали вместе 70 рыб, причём 5/9 улова первого рыбака составляли караси, а 7/17 улова второго – окуни. Сколько щук поймал каждый из рыбаков, если оба поймали поровну карасей и окуней?*

Ответ. Первый – 2 щуки, второй – 0 щук.

Решение. Из условия следует, что улов первого рыбака равен $9n$, а улов второго равен $17k$, где n и k — целые неотрицательные числа. Тогда рыбаки поймали по $5n$ карасей и по $7k$ окуней. Общий улов составляет 70 рыб, значит, получаем уравнение $9n+17k = 70$. Таким образом, $70–17k$ должно делиться на 9. Перебором находим, что подходит только $k = 2$, откуда $n = 4$. То есть первый поймал 36 рыб, а второй — 34 рыбы. Тогда оба рыбака поймали по $5n = 20$ карасей и $7k=14$ окуней, откуда получаем ответ для щук.

2. *По кругу стоят 22 человека, каждый из них – рыцарь (который всегда говорит только правду) или лжец (который всегда лжет). Каждый из них произнес фразу: «Следующие 10 человек по часовой стрелке после меня – лжецы». Сколько среди этих 22 людей лжецов?*

Ответ. 20 лжецов

Решение. Если более 10 лжецов стоят подряд, то один из них говорит правду, значит, такое невозможно. Всего 22 человека, поэтому среди них есть рыцарь. Рассмотрим рыцаря, он говорит правду, значит, 10 следующих за ним людей – лжецы. Так как 11 лжецов подряд стоять не могут, то за 10 лжецами обязан стоять рыцарь, за которым опять стоят 10 лжецов. Всего получается 2 рыцаря и 20 лжецов.

3. *Дан равнобедренный треугольник ABC ($AC = BC$). На сторонах BC, AC, AB отмечены точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Оказалось, что C_1B_1 перпендикулярно AC, B_1A_1 перпендикулярно BC и $B_1A_1 = B_1C_1$. Докажите, что A_1C_1 перпендикулярно AB.*

Решение. Пусть $\angle A = \angle B = \alpha$. Тогда $\angle C = \pi–2\alpha$. Треугольник CA_1B_1 прямоугольный, значит, $\angle CB_1A_1 = \pi/2–(\pi–2\alpha) = 2\alpha–\pi$. Тогда $\angle A_1B_1C_1 = \pi/2–(2\alpha–\pi/2) = \pi–2\alpha$. Так как $B_1A_1 = B_1C_1$, $\angle B_1C_1A_1 = \angle B_1A_1C_1 = \alpha$. Значит, $\angle AC_1A_1 = \angle AC_1B+\angle BC_1A_1 = (\pi/2–\alpha)+ \alpha = \pi/2$, то есть, A_1C_1 перпендикулярно AB.

4. В выражении $\frac{1}{2}*\frac{2}{3}*...*\frac{99}{100}$ замените все 98 звёздочек знаками арифметических действий ($–$, $+$, $\times$, $:$) таким образом, чтобы значение полученного арифметического выражения равнялось нулю.

Ответ. Например, $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times...\times\frac{9}{10}-\frac{10}{11}\times\frac{11}{12}\times...\times\frac{99}{100}$. Возможно, есть и другие верные ответы.

5. *Можно ли разбить числа от 1 до 100 на три группы таким образом, чтобы в первой группе сумма чисел делилась на 102, во второй группе – на 203, а в третьей группе – на 304?*

Ответ. Нельзя.

Решение. Пусть удалось разбить от 1 до 100 числа на группы с суммой чисел $102A$, $203B$ и $304C$. Тогда выполнено равенство $102A+203B+304C = 5050$ или $A+B+C+101(A+2B+3C) = 101\cdot 50$. Стало быть, выражение $A+B+C$ должно делиться на 101, откуда следует, что $A+B+C \geq 101$. Но тогда $102A+203B+304C \geq 102(A+B+C) \geq 102\cdot 101 > 5050$. Таким образом, требуемым образом разбить числа на группы нельзя.