1. *Найдите частное, если известно, что оно в 6 раз больше делимого и в 15 раз больше делителя.*

Ответ: 2,5. Решение. Пусть частное равно a. Тогда делимое равно $a/6$, делитель равен $a/15$, а частное равно $(a/6):(a/15) = 15/6 = 2{,}5$.

2. *Три брата вернулись с рыбалки. Мама спросила у каждого, сколько они вместе поймали рыб. Вася сказал: "Больше десяти", Петя: "Больше восемнадцати", Коля: "Больше пятнадцати". Сколько могло быть поймано рыб (укажите все возможности), если известно, что два брата сказали правду, а третий — неправду?*

Ответ: 16, 17 или 18. Решение. Если братья поймали больше 18 рыб, то все они сказали правду. Если братья поймали не больше 15 рыб, то Петя и Коля соврали. В обоих случаях получаем противоречие с условием задачи. Если же братья поймали больше 15, но не больше 18 рыб, Вася и Петя сказали правду, а Коля — неправду, что соответствует условию задачи.

3. *Можно ли пронумеровать грани куба числами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 так, чтобы номер каждой грани был делителем суммы номеров соседних граней? Если да — как, если нет — почему?*

Ответ: Нет. Решение. Допустим, нам удалось пронумеровать грани куба с соблюдением условия задачи. Рассмотрим грань номер 6. Сумма номеров четырёх соседних с ней граней должна делиться на 6. Эта сумма не меньше, чем 1+2+3+4 = 10 и не больше, чем 2+3+4+5 = 14, то есть она должна быть равна 12. Поскольку 1+2+3+4+5 = 15, для получения суммы 12 на грани, противоположной шестёрке, должна быть тройка.

Теперь рассмотрим грань номер 5. Как мы уже показали, два её соседа — это 6 и 3. Сумма двух других её соседей не меньше 1+2 =2 и не больше 2+4 = 6, то есть сумма всех соседей пятёрки не меньше 12 и не больше 15. Поскольку она должна делиться на 5, то она равна 15, то есть на гранях, соседних с пятёркой, стоят 2, 3, 4 и 6. Следовательно, напротив пятёрки стоит единица. Но тогда в соседях у двойки — 1, 3, 5 и 6, а их сумма нечётна. Противоречие.

4. *Для каждой пары чисел x, y обозначим через $s(x, y)$ наименьшее из чисел x, $1-y$, $y-x$. Какое наибольшее значение может принимать число $s(x, y)$?*

Ответ: 1/3. Решение. Сумма трёх указанных в условии чисел равна 1. Поэтому наименьшее из них не больше 1/3: в противном случае сумма этих чисел была бы больше, чем 1/3+1/3+1/3 = 1. С другой стороны, при $x = 1/3$, $y = 2/3$ наименьшее из трёх данных чисел равно 1/3.

5. *В вершинах шестиугольника записаны числа, а на каждой стороне — сумма чисел в ее концах. Назовем* ***округлением*** *замену нецелого числа на одно из двух ближайших целых (ближайшее большее или ближайшее* *меньшее), а целое пусть при округлении не меняется. Докажите, что можно все 12 чисел округлить так, чтобы по-прежнему на каждой стороне стояла сумма чисел в ее концах.*

Решение. Занумеруем вершины шестиугольника по кругу числами от 1 до 6. Нецелые числа, стоящие в вершинах с чётными номерами, округлим до ближайшего не меньшего целого, а числа, стоящие в вершинах с нечётными номерами — до ближайшего не большего целого. Теперь возьмём число, стоящее на стороне. Оно равно $a+b$, где a и b — числа в вершинах, которые соединяет сторона. Поскольку это вершины разной чётности, числа a и b мы округлили в разные стороны: пусть a вверх, а b вниз. Пусть $a = n–x$, $b = m+y$, где n, m — целые, а $0 \leq x, y \leq 1$. Тогда после округления вместо a будет n, а вместо b — m. Теперь заметим, что $a+b–(m+n) = y–x$ меньше 1 и больше –1. Поэтому $a+b$ можно округлить до $m+n$, из чего и следует справедливость утверждения задачи.