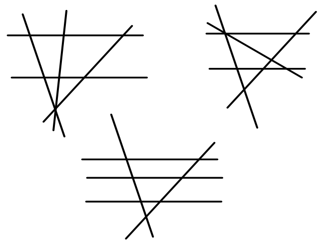
1. *Нарисуйте на плоскости пять различных прямых так, чтобы они пересекались ровно в семи различных точках.*



Ответ: **Три возможных конфигурации изображены на рисунке справа.**

♦ Можно показать, что других конфигураций пяти прямых, пересекающихся ровно в семи различных точках, нет.

2. *Мальчик пошел с отцом в тир. Отец купил ему 10 пулек. В дальнейшем отец за каждый промах отбирал у сына одну пульку, а за каждое попадание давал одну дополнительную пульку. Сын выстрелил 55 раз, после чего пульки у него кончились. Сколько раз он попал?*

Ответ: **50.** ***Решение.*** Каждый раз, когда мальчик попадал в цель, число имеющихся у него пулек оставалось прежним (одну использовал и одну получил от отца). Каждый раз, когда мальчик промахивался, число имеющихся у него пулек уменьшалось на 2 (одну использовал и одну отобрал отец). Это значит, что сын за 55 выстрелов промахнулся 10:2 = 5 раз, стало быть, попал 55–5 = 50 раз.

3. *Две биссектрисы треугольника пересекаются под углом 60 градусов. Докажите, что один из углов этого треугольника равен 60 градусам.*

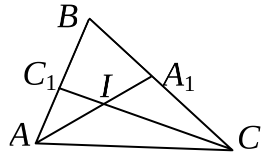


Рис. 4

Решение. Пусть биссектрисы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Допустим, что $\angle AIC_1 = 60°$. По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle AIC_1 = \angle IAC + \angle ICA = (\angle BAC + \angle BCA)/2,$$

откуда

$$\angle BAC + \angle BCA = 120° \text{ и } \angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle BCA = 60°.$$

Но это ещё не всё решение: ведь может случиться, что $\angle AIC = 60°$. Однако, тогда $\angle IAC + \angle ICA = 120°$, откуда $\angle BAC + \angle BCA = 240°$, что невозможно.

4. *Когда Винни-Пух пришел в гости к Кролику, он съел 3 тарелки мёда, 4 тарелки сгущёнки и 2 тарелки варенья, а после этого не смог выйти наружу из-за того, что сильно растолстел от такой еды. Но известно, что если бы он съел 2 тарелки мёда, 3 тарелки сгущёнки и 4 тарелки варенья или 4 тарелки мёда, 2 тарелки сгущёнки и 3 тарелки варенья, то спокойно смог бы покинуть нору гостеприимного Кролика. От чего больше толстеют: от варенья или от сгущёнки?*

Ответ: **От сгущёнки.** ***Решение.*** По условию 3м+4с+2в > 2м+3с+4в, откуда м+с > 2в (*). По условию же 3м+4с+2в > 4м+2с+3в, откуда

2с > м+в. Складывая последнее неравенство с неравенством (*), получаем м+3с > м+3в, откуда с > в.

Задача 5. *В каждой клетке клетчатой доски размером 50×50 записано по числу. Известно, что каждое число в 3 раза меньше суммы всех чисел, записанных в клетках, соседних с ним по стороне, и в 2 раза меньше суммы всех чисел, записанных в клетках, соседних с ним по диагонали. Докажите, что каждую клетку доски можно покрасить в красный или синий цвет так, что сумма всех чисел, записанных в красных клетках, равна сумме всех чисел, записанных в синих клетках.*

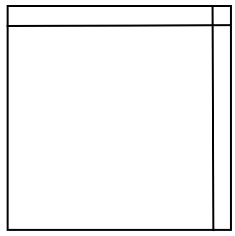


Рис. 5

Решение. Покажем, что подойдёт раскраска клеток доски в шахматном порядке. Заметим, что сумма данного числа и его соседей по диагоналям равна сумме соседей этого числа по сторонам: обе суммы втрое больше данного числа. Поэтому в квадрате 2×2, находящемся в углу доски, суммы чисел в красных и синих клетках совпадают: обе они втрое больше числа, стоящего в угловой клетке доски. Также совпадают суммы чисел в красных и синих клетках любого прямоугольника 3×2, примыкающего длинной стороной к краю доски: обе они втрое больше числа, стоящего в средней клетке стороны, примыкающей к краю доски. Наконец, совпадают суммы чисел в красных и синих клетках любого квадрата 3×3: обе они втрое больше числа, стоящего в центре квадрата.

Разобьём доску 50×50 на квадрат 48×48, квадрат 2×2 и два прямоугольника 2×48, как показано на рис. 5. Квадрат 48×48 разобьём на квадраты 3×3, а прямоугольники 2×48 — на прямоугольники 3×2, примыкающие длинной стороной к краю доски. В каждом из этих квадратов и прямоугольников суммы чисел, стоящих в красных и синих клетках, равны. Значит, они равны и на всей доске.