Решения задач 4 традиционного тура олимпиады им Леонарда Эйлера

1. *Длину прямоугольника уменьшили на 10%, а ширину уменьшили на 20%. При этом периметр прямоугольника уменьшился на 12%. На сколько процентов уменьшится периметр прямоугольника, если его длину уменьшить на 20%, а ширину уменьшить на 10%?*

Ответ: На 18%. Решение. Пусть длина равна a, а ширина — b. По условию $2(0{,}1a+0{,}2b) = 0{,}12(2a+2b)$, откуда $a = 4b$. Если длину уменьшить на 20%, а ширину на 10%, то периметр уменьшится на $2(0{,}2a+0{,}1b) = 1{,}8b$, а равен он был $10b$. Следовательно, периметр уменьшится на 18%.

2. *В каждой клетке квадрата 3x3 записано натуральное число. При этом все числа попарно различны и отличны от единицы. Известно, что число, записанное в каждой из клеток, является делителем произведения всех чисел, стоящих в клетках, соседних с ней по стороне. Найдите наибольшее возможное значение количества простых чисел среди выписанных.*

A	*B*	*C*
D	*E*	*F*
G	*H*	*K*

Ответ: Шесть. Решение. Докажем, что двумя составными числами обойтись нельзя. Будем рассуждать от противного. Пусть имеется всего два составных числа и 7 простых. Произведение нескольких простых чисел не может делиться на отличное от них простое число. Поэтому составными должны быть: одно из чисел A, B, D; одно из чисел D, G, H; одно из чисел C, E, F, K. При этом, чтобы составных чисел было на самом деле всего два, надо, чтобы одним из них было число D, а другим –число F. Но тогда простое число H оказывается окружёнными тремя простыми числами E, G, K — противоречие. Пример с тремя составными числами можно построить, например, как на рисунке справа, где A, B, C, G, H, K — различные простые числа.

A	*B*	*C*
AG	*BH*	*CK*
G	*H*	*K*

3. *Могут ли расстояния от точки плоскости до вершин некоторого квадрата быть равными 1, 1, 2 и 3?*

Ответ: Нет. Решение. По условию точка O равноудалена от двух вершин некоторого квадрата $ABCD$. Возможны два случая. **1)** Пусть точка O равноудалена от двух *соседних* вершин квадрата (пусть это вершины A и B). Тогда она лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB. Но он же является серединным перпендикуляром и к стороне CD, то есть точка O должна быть равноудалена также и от точек C и D, что, очевидно, невозможно. **2)** Пусть точка O равноудалена от двух *противоположных* вершин квадрата (пусть это вершины A и C). Тогда она лежит на серединном перпендикуляре к AC, то есть на прямой BD. Снова рассмотрим два возможных случая. **2а)** Точка O лежит на диагонали BD. Тогда $AB = BD = OB+OD = 5 > 2 = OA+OB$, что невозможно. **2б)** Точка O лежит на продолжении диагонали BD (пусть, для определённости, за точку D). Тогда в треугольнике ADO против тупого угла D лежит сторона $OA = 1 < 2 \leq OD$, что также невозможно.

4. *В кофейне встретились 55 индийцев и турок, каждый из которых пил чай либо кофе. Все индийцы говорят правду, когда пьют чай и обманывают, когда пьют кофе, а все турки — наоборот. На вопрос "Вы пьете кофе?" ответили "да" 44 человека, на вопрос "Вы турок?" — 33 человека, а с утверждением "На улице идет дождь" согласилось 22 человека. Сколько индийцев в кофейне пьют чай?*

Ответ: 0. Решение. Пусть $И_ч$, $И_к$ — число индийцев, пьющих чай и кофе, соответственно. Аналогично определим величины $Т_ч$ и $Т_к$. Тогда из первого вопроса следует, что $Т_ч+Т_к = 44$, а из второго вопроса следует $И_к+Т_к = 33$. Предположим, что «На улице идет дождь» — ложное утверждение. Тогда $И_к+Т_ч = 22$. Складывая первые два равенства и вычитая третье, получаем $2Т_к = 55$, противоречие. Значит, дождь идет, откуда $И_ч+Т_к = 22$. Складывая все три уравнения, и вычитая очевидное равенство $И_ч+И_к+Т_ч+Т_к = 55$, получаем $2Т_к = 44$, откуда $Т_к = 22$ и $И_ч = 0$.

5. *Каждая из сторон треугольника разбита на 2008 равных частей. Через каждую точку деления проведены прямые, параллельные двум другим сторонам, в результате чего треугольник разбился на равные треугольные поля.* ***Строкой*** *будем называть ряд полей, заключенных между двумя соседними параллельными прямыми, либо единственное поле, стоящее при вершине треугольника. Петя и Вася ставят по очереди в одно из свободных полей 1 либо –1. После того, как все клетки оказываются занятыми, в каждой из строк подсчитывается произведение. Петя выигрывает, если отрицательных произведений четное число, иначе выигрывает Вася. Кто выиграет при правильной игре, если первым ходит Петя?*

Ответ Выиграет Вася. Решение Заметим, что в треугольнике четное число полей и, значит, последним ходит Вася. Своим последним ходом он всегда может сделать так, чтобы произведение всех записанных чисел было равно –1. Покажем, что этого достаточно для его победы. Перемножим все числа, стоящие в строках, параллельных одной из сторон треугольника. Полученное произведение равно произведению всех чисел в треугольнике и равно –1, следовательно, строк с отрицательными произведениями, среди рассмотренных, нечетное число. Рассматривая аналогично строки, параллельные другим двум сторонам, получаем, что всего с отрицательными произведениями нечетное количество строк. Значит, Вася выигрывает.