МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА. 2 ЭТАП.

1. *Гриб называется плохим, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?*

2. *Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точки L и M выбраны на катетах BC и AC соответственно так, что BL = CM. Докажите, что треугольник LMK — также прямоугольный равнобедренный.*

3. *По кругу выписаны числа 1, 2, 3, . . . , 10 в некотором порядке. Петя вычислил 10 сумм всех троек соседних чисел и написал на доске наименьшее из вычисленных чисел. Какое наибольшее число могло быть написано на доске?*

4. *Имеются чашечные весы и 100 монет, среди которых несколько (больше 0, но меньше 99) фальшивых монет. Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие тоже весят одинаково, при этом фальшивая монета легче настоящей. Можно делать взвешивание на весах, заплатив перед взвешиванием одну из монет (неважно, фальшивую или настоящую). Докажите, что можно с гарантией обнаружить настоящую монету.*

5. *На столе лежат 7 карточек с цифрами от 0 до 6. Двое по очереди берут по одной карточке. Выигрывает тот, кто впервые из своих карточек сможет составить натуральное число, делящееся на 17. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его противник?* (И. Рубанов)

6. *В трех клетках клетчатого листа записаны числа, а остальные клетки пусты. Разрешается выбрать два числа из разных непустых клеток и записать в пустую клетку их сумму; также можно выбрать числа a, b, c из трех разных непустых клеток и записать в пустую клетку число $ab+c^2$. Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно записать в одну из клеток квадрат суммы трех исходных чисел (какими бы они ни были).*

7. *В выпуклом четырехугольнике ABCD некоторая точка диагонали AC принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AB и CD, а некоторая точка диагонали BD принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AD и BC. Докажите, что ABCD — прямоугольник.*

8. *В футбольном турнире участвовало 8 команд, причем каждая сыграла с каждой ровно по одному разу Известно, что любые две команды, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное число очков. Найдите наибольшее возможное общее число ничьих в этом турнире. (За выигрыш матча команде начисляется 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0.)* (С. Токарев)