II олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап
Решения заданий первого дня.

1. Занумеруем все простые числа в порядке возрастания: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, … . Может ли среднее арифметическое $(p_1+\ldots+p_n)/n$ при каком-нибудь $n \geq 2$ быть простым числом? (*С. Волчёнков*)

Ответ: Нет. **Решение**. Пусть $(p_1+\ldots+p_n)/n = q \Leftrightarrow p_1+\ldots+p_n = nq$ (*), где q — простое число. Очевидно, если $n > 1$, то $q > 2$. Поэтому при чётном n левая часть равенства (*) нечётна, а правая — чётна, при нечётном n — наоборот. Следовательно, такое равенство невозможно. **Замечание**. Фактически мы доказали более сильное утверждение: среднее арифметическое не может быть никаким нечетным числом.

2. В Швамбрании некоторые города связаны двусторонними беспосадочными авиарейсами. Рейсы разделены между тремя авиакомпаниями, причём если какая-то авиакомпания обслуживает линию между городами А и Б, то самолёты других компаний между этими городами не летают. Известно, что из каждого города летают самолёты всех трёх компаний. Докажите, что можно, вылетев из некоторого города, вернуться в него, воспользовавшись по пути рейсами всех трёх компаний и не побывав ни в одном из промежуточных городов дважды. (*С. Берлов*)

Решение. Вылетим из любого города А первой компанией, попадем в город Б, из него вылетим второй компанией, далее третьей, затем снова первой, второй, третьей и т. д. Рассмотрим самый первый момент, когда на этом пути встретился город В, где мы уже были. Тогда кусок нашего пути от первого посещения города В до второго и будет искомым. В самом деле, если мы в первый раз вылетели из города В в город Г, то из Г сразу вернуться в В мы не могли. Поэтому между двумя посещениями города В мы совершили хотя бы три перелёта и, значит, воспользовались по пути рейсами всех трёх компаний.

3. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AB равна диагонали AC и перпендикулярна стороне AD, а диагональ AC перпендикулярна стороне CD. На стороне AD взята точка K такая, что $AC = AK$. Биссектриса угла ADC пересекает BK в точке M. Найдите угол ACM. (*Р. Женодаров*)

Ответ: $\angle ACM = 45°$. **Решение**. Поскольку треугольник BAK — прямоугольный равнобедренный, $\angle AKB = 45°$. Пусть биссектриса угла CAD пересекает отрезок BK в точке N. Треугольники ANK и ANC равны: AN общая, $AC = AK$, $\angle CAN = \angle KAN$. Поэтому $\angle NCA = \angle NKA = 45°$. Поэтому CN — биссектриса прямого угла ACD, а N — точка пересечения биссектрис треугольника ACD. Таким образом, точка N лежит на биссектрисе угла ACD и на отрезке BK, то есть совпадает с точкой M. Следовательно, $\angle ACM = \angle ACN = 45°$.

4. В вершинах куба расставили числа 1^2, 2^2, …, 8^2 (в каждую из вершин — по одному числу). Для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих произведений. (*Д. Фон-дер-Флаасс*)

Ответ: 9420. **Решение**. Раскрасим вершины куба в два цвета так, чтобы концы каждого ребра были разноцветными. Пусть в вершинах одного цвета стоят числа a_1, a_2, a_3, a_4, а в вершинах другого — числа b_1, b_2, b_3, b_4, причём числа с одинаковыми номерами стоят в противоположных вершинах. Тогда, как легко проверить, указанная в условии сумма произведений будет равна $(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)$. По неравенству о средних

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4) \leq (a_1+a_2+a_3+a_4+b_1+b_2+b_3+b_4)^2/4 = (1^2+2^2+\ldots+8^2)^2/4 = 10404,$$

причём равенство достигается только при $a_1+a_2+a_3+a_4 = b_1+b_2+b_3+b_4$ (1). С другой стороны, сумма $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$, где a_i и b_i — числа 1^2, 2^2, …, 8^2, минимальна тогда, когда 8^2 умножается на 1^2, 7^2 — на 2^2, 6^2 — на 3^2, 5^2 — на 4^2 (2). В самом деле, пусть 8^2 умножается на $a^2 \neq 1^2$, а 1^2 — на b^2. Понятно, что умножив 8^2 на 1^2, а a^2 — на b^2, мы уменьшим сумму $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$. Затем аналогично показываем, что мы уменьшим сумму, умножив 7^2 на 2^2, и т.д.

Как ни удивительно, можно добиться *одновременного* выполнения условия максимальности (1) и условия минимальности (2): для этого надо в вершины одного цвета поставить числа 1^2, 4^2, 6^2 и 7^2, а в вершины другого — остальные таким образом, чтобы 8^2 и 1^2, 7^2 и 2^2, 6^2 и 3^2, 5^2 и 4^2 стояли в противоположных вершинах. Понятно, что такая расстановка и даст искомый максимум сумм произведений, равный $(1^2+4^2+6^2+7^2)^2-(8^2\cdot1^2+7^2\cdot2^2+6^2\cdot3^2+5^2\cdot4^2) = 102^2-984 = 9420$. **Замечание**. Тот факт, что числа 1^2, 2^2, …, 8^2 можно разбить на две группы по 4 числа с равными суммами чисел, не случаен. Заметим, что $(n+1)^2-n^2 = 2n+1$, поэтому $((n+3)^2-(n+2)^2)-((n+1)^2-n^2) = (2n+5)-(2n+1) = 4$ при любом n. Отсюда $(1^2-2^2-3^2+4^2)-(5^2-6^2-7^2+8^2) = 1^2-2^2-3^2+4^2-5^2+6^2+7^2-8^2 = 4-4 = 0$.