II МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий первого дня

1. *Однажды барон Мюнхгаузен, вернувшись с прогулки, рассказал, что половину пути он шёл со скоростью 5 км/ч, а половину времени, затраченного на прогулку — со скоростью 6 км/ч. Не ошибся ли барон?* (*И. Рубанов*)

Ответ. Ошибся. **Решение**. Решение. Если барон половину затраченного времени шёл со скоростью 6 км/ч, то со скоростью 5 км/ч он шёл, самое большее, вторую половину этого времени, то есть не дольше, чем со скоростью 6 км/ч. Но это означает, что барон, идя со скоростью 5 км/ч, прошёл меньшее расстояние, чем идя со скоростью 6 км/ч. Стало быть, со скоростью 5 км/ч он прошёл меньше половины пути.

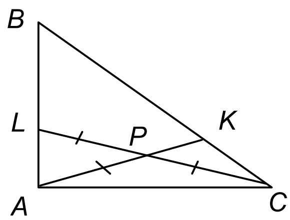
Замечание. В условии задачи не сказано, что Мюнхгаузен на прогулке шёл только со скоростью 5 или 6 км/ч: оно не исключает того, что часть времени он мог двигаться и с другими скоростями.

2. *Найдите какие-нибудь семь последовательных натуральных чисел, каждое из которых можно изменить (увеличить или уменьшить) на 1 таким образом, чтобы произведение семи полученных в результате чисел равнялось произведению семи исходных чисел.* (*Методкомиссия Всероссийской олимпиады*)

Решение. Решение. Подходят, например, числа от 3 до 9: заменим 3 на 2, 4 на 5, 5 на 6, а числа в каждой из пар (6, 7) и (8, 9) заменим друг на друга. В итоге получаем $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 8$.

Замечание. Если удалось изменить на 1 каждое из n идущих подряд натуральных чисел m, ..., $m+n-1$ так, чтобы их произведение сохранилось, то можно сделать то же самое и с $n+2$ идущими подряд натуральными числами m, ..., $m+n-1$, $m+n$, $m+n+1$: достаточно к подходящим заменам чисел m, ..., $m+n-1$ добавить замены $(m+n) \leftrightarrow (m+n+1)$. Именно так был построен пример из нашего решения: сначала найдены три подходящих числа 3, 4, 5, а потом к ним добавлены пары чисел 6, 7 и 8, 9. Добавляя следующие пары, мы получим примеры для любого нечётного количества идущих подряд натуральных чисел. Очевидным образом строятся примеры и для любого чётного количества идущих подряд натуральных чисел.

3. *На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K так, что AB = AK. Отрезок AK пересекает биссектрису CL в ее середине. Найдите острые углы треугольника ABC.* (*И. Богданов*)



Ответ. $\angle B = 54^\circ$, $\angle C = 36^\circ$. **Решение**. Обозначим середину биссектрисы CL через P, а угол ABC через β; тогда $\angle ACL = (90^\circ-\beta)/2$. В прямоугольном треугольнике ACL отрезок AP является медианой, поэтому $AP = CP = LP$. Теперь из равнобедренных треугольников APL и ABK получаем $\angle ALP = \angle LAP = \angle BAK = 180^\circ-2\angle ABK = 180^\circ-2\beta$. С другой стороны, $\angle ALP = \angle ABC+\angle LCB$ как внешний угол в ΔBCL. Значит, $180^\circ-2\beta = \beta+(90^\circ-\beta)/2$, откуда $5\beta/2 = 135^\circ$, то есть $\beta = 54^\circ$. Тогда $\angle ACB = 90^\circ-\angle ABC = 36^\circ$.

4. *Даны натуральные числа a и b, причем a < 1000. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.* (*П. Кожевников*)

Решение. Предположим, что утверждение задачи неверно; тогда найдётся простое число p, входящее в разложение числа a^2 на простые множители с показателем меньшим, чем в разложение числа b. То есть, если a делится на p^k, но не делится на p^{k+1}, а b делится на p^m, но не делится на p^{m+1}, то $m > 2k$, а значит, $m \geq 2k + 1$. Но из делимости a^{21} на b^{10} следует, что $21k \geq 10m$. Отсюда $21k \geq 10(2k + 1)$, то есть $k \geq 10$. Но $a < 1000 < 2^{10} \leq p^{10} \leq p^k$, поэтому a не может делиться на p^k. Противоречие.