II олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. На полке в произвольном порядке стоят десять томов энциклопедии, пронумерованных от 1 до 10. Разрешается менять местами любые два тома, между которыми стоит не меньше четырёх других томов. Всегда ли можно расставить все тома по возрастанию номеров? (*Д. Храмцов*)

Ответ: Да. **Решение**. Возьмём любой том. Он удалён не меньше, чем на 4 тома, либо от тома, стоящего первым, либо от тома, стоящего последним. Поэтому мы сможем поставить его либо на первое, либо на последнее место, а потом, если захотим, переставить с последнего на первое или наоборот. Поскольку место, на котором он *должен* стоять, удалено не меньше, чем на 4 тома, либо от первого места, либо от последнего, мы сможем следующим ходом поставить его на это место. Проделав описанную процедуру со всеми томами, кроме томов 1 и 10, мы поставим все их на свои места. Тома 1 и 10 окажутся после этого крайними, и мы получим расстановку томов по возрастанию номеров либо сразу, либо поменяв местами крайние тома.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы B и D равны, $CD = 4BC$, а биссектриса угла A проходит через середину стороны CD. Чему может быть равно отношение AD/AB? (*С. Берлов*)

Ответ: 2:3. **Решение**. Обозначим через M середину стороны CD. Рассмотрим на луче AB точку K, симметричную точке D относительно прямой AM. Поскольку $\angle ABC = \angle ADM = \angle AKM$, то $BC \parallel KM$ и точка K лежит на отрезке AB. Поскольку $CM = DM = KM$, то $\angle DKC = 90°$ и $KC \parallel AM$. Следовательно, у треугольников AKM и KBC стороны соответственно параллельны, поэтому они подобны с коэффициентом $k = KM/BC = 2$, откуда $AD = AK = 2KB$ и $AD:AB = 2:3$.

7. Докажите, что для произвольных a, b, c равенство $\frac{a(b-c)}{b+c}+\frac{b(c-a)}{c+a}+\frac{c(a-b)}{a+b}=0$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено равенство $\frac{a^2(b-c)}{b+c}+\frac{b^2(c-a)}{c+a}+\frac{c^2(a-b)}{a+b}=0$.

Решение. Раскрыв в левой части скобки и приведя подобные члены, легко показать, что

$$\left(\frac{a(b-c)}{b+c}+\frac{b(c-a)}{c+a}+\frac{c(a-b)}{a+b}\right)(a+b+c)=\frac{a^2(b-c)}{b+c}+\frac{b^2(c-a)}{c+a}+\frac{c^2(a-b)}{a+b} \quad (*).$$

Поэтому если $\frac{a(b-c)}{b+c}+\frac{b(c-a)}{c+a}+\frac{c(a-b)}{a+b}=0$, то и $\frac{a^2(b-c)}{b+c}+\frac{b^2(c-a)}{c+a}+\frac{c^2(a-b)}{a+b}=0$. Обратно, пусть $\frac{a^2(b-c)}{b+c}+\frac{b^2(c-a)}{c+a}+\frac{c^2(a-b)}{a+b}=0$. При $a+b+c \neq 0$, равенство $\frac{a(b-c)}{b+c}+\frac{b(c-a)}{c+a}+\frac{c(a-b)}{a+b}=0$ сразу получается из равенства (*). Если же $a+b+c = 0$, то

$$\frac{a(b-c)}{b+c}+\frac{b(c-a)}{c+a}+\frac{c(a-b)}{a+b}=\frac{a(b-c)}{-a}+\frac{b(c-a)}{-b}+\frac{c(a-b)}{-c}=(c-b)+(a-c)+(b-a)=0.$$

8. Среди 100 монет есть 4 фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые — тоже, фальшивая монета легче настоящей. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну настоящую монету? (*А. Шаповалов*)

Решение. Приведем один из возможных способов. Разделим 100 монет на две группы (номер 1 и номер 2) по 33 монеты и одну группу (номер 3) из 34 монет. Первым взвешиванием положим на чаши весом группы 1 и 2. Если одна из чаш оказалась тяжелее другой, то на ней — не более одной фальшивой монеты. Тогда вторым взвешиванием можно сравнить любые две монеты из этой группы друг с другом: если одна из них тяжелее, то она настоящая, а если обе одинаковы, то обе являются настоящими. Если же после первого взвешивания оказалось, что две группы из 33 монет весят поровну, то это означает, что фальшивые монеты распределились по трем группам одним из таких способов: (0,0,4), (1,1,2) или (2,2,0). Второе взвешивание делаем так: добавим к одной из групп одну монету с другой чаши, а все остальные монеты с другой чаши снимем и заменим на 34 монеты из третьей группы. У этого взвешивания возможны три исхода. Первый: 1 + 33 < 34. Это значит, что слева фальшивых монет больше, чем справа. Значит, имеет место случай (2,2,0), т.е. все 34 монеты — настоящие. Второй: 1 + 33 = 34. Это значит, что фальшивых слева и справа поровну. Значит, имеет место случай (1,1,2), причем единственную фальшивую монету из второй кучки мы как раз переложили к первой кучке. Тогда все остальные 32 монеты из второй кучки — настоящие. Третий: 1 + 33 > 34. Это значит, что имеет место либо случай (0,0,4), либо случай (1,1,2), в котором переложенная монета не является фальшивой. В обоих случаях переложенная монета — настоящая.