Первый тур дистанционного этапа олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *У Феди есть несколько гирь, веса которых в килограммах — целые числа, меньшие 10. Может ли случиться, что ими можно набрать веса в 100, 102, 103 и 104 кг, а веса в 101 и 105 кг — нельзя?*

Ответ: Может. Пример (есть и другие!). 11 гирь по 9 кг и по одной гире в 1, 3 и 4 кг. Легко проверить, что все нужные веса набираются. Далее, поскольку $1+3+4+90 < 100$, чтобы набрать вес в 101 или 105 кг, надо использовать все 11 девятикилограммовых гирь. Но недостающие при этом до 101 и 105 кг веса в 2 и 6 кг соответственно гирями в 1, 3 и 4 кг набрать невозможно.

Указания по оценке. За верный пример без обоснования невозможности набрать 101 и 105 кг — *4 балла*.

2. *В каждой из 111 семей — три человека: папа, мама и ребёнок. Все 333 человека выстроились в ряд. Оказалось, что родители каждого ребёнка стоят с разных сторон от него (но, возможно, не рядом с ним). Докажите, что среди центральных 111 человек в этом ряду есть хотя бы один ребёнок.*

Решение. Назовем родителя *левым* (*правым*), если его ребёнок стоит в ряду левее (правее) него. Пусть все центральные 111 человек — родители. Тогда среди них либо левых, либо правых будет больше 55, то есть хотя бы 56. Пусть есть хотя бы 56 левых. Тогда все 56 их детей — среди первых 111 человек, и там же стоят 56 их вторых родителей. Противоречие. Случай 56 правых разбирается аналогично.

Указания по оценке. При доказательстве «от противного» показано, что среди левых (правых) 111 человек не меньше 56 детей, но дальнейшего содержательного продвижения нет — *1 балл*.

3. *Точка D лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, но не совпадает с ее серединой. Докажите, что среди отрезков AD, BD и CD нет равных.*

Решение. AD не равно BD по условию. Допустим, $AD = CD$. Тогда равны углы DAC и ACD. Пусть каждый из них равен x. Но тогда каждый из углов DAB и ABD равен $90°-x$, откуда $AD = BD = CD$ — противоречие. Аналогично, CD не может равняться BD.

Указания по оценке. Если доказано хотя бы одно из неравенств: AD не равно CD или BD не равно CD — оценка *не ниже 6 баллов*.

4. *Пятизначное число x начинается на 4 и оканчивается на 7, а пятизначное число y начинается на 9 и оканчивается на 3. Известно, что у чисел x и y есть общий пятизначный делитель. Докажите, что $2y–x$ делится на 11.*

Решение. Пусть $x = az$, $y = bz$, где z — пятизначный общий делитель чисел x и y. Очевидно, a и b нечётны, $b > a$, $a \leq 4$ и $b \leq 9$. Из этого следует, что a — это 1 или 3. Если $a = 1$, то $z = x$, $y = bx$, $b \geq 3$, но уже $3x > 120000$ — шестизначное число. Следовательно, $a = 3$. Единственная цифра, произведение которой на 3 оканчивается на 7, это 9. Поэтому z оканчивается на 9. Единственное однозначное b, при котором произведение bz оканчивается на 3, равно 7.

Итак, $x = 3z$, $y = 7z$, откуда $2y–x = 11z$, откуда и следует утверждение задачи.

Указания по оценке. Равенства $x = 3z$, $y = 7z$ использованы без обоснования, что другие варианты невозможны — *1 балл*. Доказано только, что $x = 3z$ — *2 балла*. Доказано, что $x = 3z$ и z оканчивается на 9, дальнейшего содержательного продвижения нет — *3 балла*.

Нет обоснования, что $y = 7z$ — *не выше 3 баллов*.

5. *Имеется 2009 кучек, по 2 камня в каждой. Разрешается взять самую большую кучку из тех, в которых количество камней чётно (если таких несколько, то любую из них), и ровно половину камней из неё переложить в любую другую кучку. Какое наибольшее число камней в одной кучке можно получить такими операциями?*

Ответ: 2010. Решение. Описанные в условии операции не уменьшают числа кучек, поэтому в каждой из них в каждый момент есть хотя бы один камень. Следовательно, накопить в одной кучке более, чем $2009 \cdot 2 - 2008 = 2010$ камней, невозможно.

Покажем, как получить кучку из 2010 камней. Возьмём пять кучек из двух камней и проведём такие преобразования: $(2,2,2,2,2) \to (3,1,2,2,2) \to (3,1,3,1,2) \to (3,1,4,1,1) \to (5,1,2,1,1)$. Три кучки по одному камню отложим, заменим их тремя кучками по два камня и проделаем такие преобразования: $(5,2,2,2,2) \to (5,1,3,2,2) \to (5,1,4,1,2) \to (7,1,2,1,2)$. Теперь отложим две кучи по одному камню, заменим их двумя кучами по два камня и аналогично получим $(9,1,2,1,2)$. Когда в большой куче накопится 2007 камней, останется ещё три кучи по 2 камня и 2005 куч по одному камню. Дальше действуем так: $(2007,2,2,2) \to (2007,1,3,2) \to (2007,1,4,1) \to (2009,1,2,1) \to (2010,1,1,1)$.

Указания по оценке. Только ответ — *0 баллов*. Ответ с доказательством, что камней в одной куче может быть не более 2010, но без примера, как можно получить 2010 — *2 балла*. Ответ с обоснованным примером, но без доказательства, что больше 2010 камней в одной куче быть не может — *4 балла*.