Второй тур дистанционного этапа олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач и указания по оценке решений

1. *Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.*

Ответ: 133. Решение. Так как $1000 = 2^2 5^3$, каждое из наших чисел в своем разложении на простые множители может содержать только двойки и пятёрки. При этом эти множители не могут присутствовать в разложении числа вместе, иначе оно будет делиться на 10. Следовательно, одно из чисел равно 5^3, а другое — 2^3, откуда и получаем ответ.

Указания по оценке. Только верный ответ без указания двух чисел — *0 баллов*. Верный ответ с указанием чисел, но без обоснования отсутствия других ответов — *2 балла*. Проведено верное рассуждение, верно найдены оба числа, но сумма найдена неверно из-за арифметической ошибки — *5 баллов*.

2. *Школьный чемпионат по настольному теннису проводили по олимпийской системе. Победитель выиграл 6 партий. Сколько участников чемпионата выиграло партий больше, чем проиграло?* (*В первом туре чемпионата, проводящегося по олимпийской системе, участников разбивают на пары. Те, кто проиграл первую игру, выбывают из чемпионата, а те, кто выиграл в первом туре, разбиваются на пары и проводят второй тур. Проигравшие снова выбывают, победители разбиваются на пары для третьего тура и т.д., пока не останется один чемпион. Известно, что в каждом туре нашего чемпионата для каждого участника нашлась пара.*)

Ответ: 16. Решение. Так как в каждом туре для каждого игрока нашлась пара и в каждой паре один из игроков выбывал, то общее количество игроков после каждого тура уменьшалось в два раза. Победитель участвовал в каждом туре и побеждал, значит, всего туров было шесть. Так как после шестого тура победитель определился однозначно, то всего участников было $2^6 = 64$. Проигравшие в первом туре имеют одно поражение и ноль побед, проигравшие во втором туре имеют одну победу и одно поражение. Все вышедшие в третий тур будут иметь по итогам турнира не менее двух побед и не более одного поражения (после которого они выбыли), то есть у них количество побед больше количества поражений. Так как после каждого тура количество участников уменьшалось в два раза, то в третий тур вышло 16 участников.

Указания по оценке. Решение опирается на два факта: (1) всего в турнире было 64 участника; (2) после каждого тура число участников уменьшалось ровно вдвое. За верный ответ без всякого объяснения — *1 балл*. За верный ответ с рассуждениями, явно или неявно опирающимися на факты (1) и (2), при отсутствии обоснования *обоих* этих фактов — *не более 3 баллов*. При отсутствии обоснования факта (1) — *не более 5 баллов*. При отсутствии обоснования факта (2) — *не более 6 баллов*.

3. *В треугольнике ABC медиана BM в два раза меньше стороны AB и образует с ней угол в 40 градусов. Найдите угол ABC.*

Ответ: 110°. Решение. Продлим медиану BM за точку M на ее длину и получим точку D. Так как $AB = 2BM$, то $AB = BD$, то есть треугольник ABD — равнобедренный. Следовательно, углы BAD и BDA равны по (180°–40°):2 = 70° каждый. $ABCD$ — параллелограмм, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Значит, угол CBD, как и ADB, равен 70°, а угол ABC, равный сумме CBD и ABD, составляет 110°.

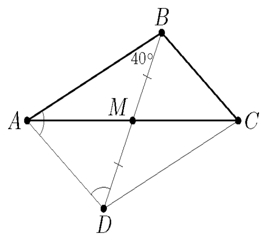

Рис. 8.2

Указания по оценке. Верный ответ без обоснования — *0 баллов*. Идея достраивания треугольника до параллелограмма без дальнейшего содержательного продвижения — *2 балла*.

4. *Представьте числовое выражение $2\cdot 2009^2 + 2\cdot 2010^2$ в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.*

Ответ: 4019^2+1^2 или 2911^2+2771^2 Решение. Достаточно заметить, что $2\cdot 2009^2 + 2\cdot 2010^2 = (2010+2009)^2+(2010-2009)^2$.

Примечание. Можно показать, что других ответов нет.

Указания по оценке. Для полного балла *достаточно указать и обосновать один из двух возможных ответов*. Верный ответ без обоснования — *0 баллов*. Приведена верная формула, дающая ответ (например, $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2a^2+2b^2$ или $2a^2+2(a+1)^2 = (2a+1)^2+1$), но ответ получился неверным из-за вычислительной ошибки — *5 баллов*.

5. *Том Сойер взялся покрасить очень длинный забор, соблюдая условие: любые две доски, между которыми ровно две, ровно три или ровно пять досок, должны быть покрашены в разные цвета. Каким наименьшим количеством различных красок он сможет обойтись.*

Ответ: Тремя. Решение. Заметим, что между первой и четвёртой и четвёртой и седьмой досками — по две доски, а между первой и седьмой досками — пять досок. Поэтому первая, четвёртая и седьмая доски забора должны быть раскрашены в различные цвета, то Тому понадобятся по крайней мере три различные краски. С другой стороны, трёх цветов ему хватит, если красить, например, так: AAABBBCCCAAABBBCCC…: тут между любыми двумя одноцветными досками не менее 6 досок.

Указания по оценке. Только ответ — *0 баллов*. Доказано, что двух цветов не хватит, примера для трёх цветов нет — *3 балла*. Есть только верный пример для трёх красок без объяснения, почему он подходит — *не более 3 баллов* (3 балла, если объяснение очевидно, как в нашем примере, и от 0 до 2 баллов в противном случае, в зависимости от сложности обоснования). Доказано, что двух цветов не хватит и приведён верный пример, но без объяснения, почему он подходит — *от 5 до 7 баллов, в зависимости от сложности обоснования*.