Третий тур дистанционного этапа олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Написали два числа — первое и второе. К первому прибавили второе — получили третье, ко второму прибавили третье — получили четвертое и т.д. Сумма первых шести чисел равна 2008. Чему равно пятое число?*

Ответ. 502. Решение. Пусть первое число равно a, второе — b. Тогда третье число равно $a+b$, четвёртое — $a+2b$, пятое — $2a+3b$, шестое — $3a+5b$, а сумма всех шести чисел — $8a+12b$. Таким образом, пятое число равно четверти суммы всех шести чисел, то есть 2008:4 = 502.

Указания по оценке. Ответ без обоснования — *0 баллов*. Ответ, полученный рассмотрением числового примера — *0 баллов*. Замечено, что $2a+3b = (8a+12b)/4$, но деление 2008 на 4 выполнено неверно — *4 балла*.

2. *Из четырех внешне одинаковых монет три — настоящие и весят одинаково, а четвертая — фальшивая, и ее вес отличается от веса настоящей. Имеются весы, на которых можно определить точный вес двух или большего числа монет. Точный вес одной монеты определить нельзя. Как за 4 взвешивания найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее, чем настоящие?*

Решение. **Первый способ.** Положим на весы одну монету и по очереди взвесим её с каждой из трёх других. Если все три взвешивания дадут одинаковый результат, фальшива первая монета, и чтобы узнать, легче она или тяжелее настоящей, надо четвёртым взвешиванием взвесить две настоящих монеты. Если же одно из взвешиваний даст не такой результат, как два других, фальшива та монета, которую мы в нём добавили к первой, а тяжелее она или легче настоящей, покажет сравнение результата этого взвешивания с результатами двух других.

Второй способ. Будем взвешивать монеты по три. Три взвешивания, в которых участвует фальшивая монета, дадут одинаковые результаты, а одно, в котором она не участвует — другой результат. Если этот результат меньше результатов трёх остальных взвешиваний — фальшивая монета тяжелее настоящей, если больше — легче.

Указания по оценке. Есть только алгоритм нахождения фальшивой монеты за 3 взвешивания: без обоснования — *1 балл*, с обоснованием — *3 балла*. Верный алгоритм нахождения фальшивой монеты и выяснения, легче она или тяжелее, без объяснения, когда фальшивая монета легче, а когда тяжелее — *4 балла*. В решении, требующем разбора случаев, хотя бы один случай разобран неверно — *не более 3 баллов*.

3. *В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, вчетверо короче гипотенузы. Найдите острые углы треугольника.*

Ответ. 15 и 75 градусов. Решение. Пусть ABC — данный треугольник с прямым углом при вершине C. Как известно, медиана CM равна половине гипотенузы AB. Высота CH по условию равна $AB/4$. Стало быть, в прямоугольном треугольнике CHM гипотенуза CM вдвое длиннее катета CH. Следовательно, угол CMH равен 30 градусам, а смежный с ним угол (пусть это BMC) равен 150 градусам. Поскольку это угол при вершине равнобедренного треугольника BMC, $\angle ABC = \angle MBC = (180°-\angle BMC)/2 = 15°$, откуда и получаем ответ.

Указания по оценке. Ответ без обоснования — *0 баллов*. Ссылка вместо утверждения, что если катет вдвое короче гипотенузы, то он лежит против угла в 30 градусов, на обратное к нему — *–3 балла*. Тригонометрическое решение без обоснования значений нужных функций углов в 15 и 71 градусов — *не более 3 баллов*.

4. *Между пунктами К и М через озеро Б курсируют с равными постоянными скоростями несколько паромов. Каждый паром стоит в каждом из пунктов столько же времени, сколько тратит на переправу. Путешественник заметил, что паромы отправляются из каждого пункта через равные промежутки времени, а его паром отправился ровно в тот момент, когда к одному из соседних причалов прибыл паром с другого берега. Докажите, что число курсирующих на переправе паромов делится на 4.*

Решение. Пусть паромы отправляются от причала с интервалом t минут, через озеро плывут по T минут, а пока паром путешественника стоял у берега, к этому берегу прибыло n других паромов. Так как последний из них прибыл в момент отплытия путешественника, промежуток времени t укладывается в промежутке времени T ровно n раз, то есть $T = nt$. С другой стороны, каждый паром отправляется из данного пункта, например, К с интервалом в $4T$: T на переправу, T на стоянку в М, T на обратную переправу и T на стоянку перед следующим отправлением. Следовательно, всего на переправе работает $4T/t = 4n$ паромов.

Указания по оценке. Показано только, что длина цикла для одного парома равна $4T$ — *0 баллов*. Показано, что длина цикла для одного парома равна $4T$ и без обоснования утверждается, что если этот цикл разделить на четыре отрезка времени длиной T, то за каждый из них в данном пункте швартуется одно и то же число паромов — *2 балла*. Показано, что есть 4 парома, плывущие с интервалом в T, дальнейшего продвижения нет — *2 балла*.

5. *На доске нарисовали 8 непересекающихся кругов и от каждого провели по стрелке к тем из остальных семи, которые не больше него. Всего получилось 33 стрелки. Докажите, что среди нарисованных на доске кругов есть три равных.*

Решение. Занумеруем круги в порядке возрастания радиусов (порядок между кругами равных радиусов устанавливаем произвольно). Тогда из каждого круга заведомо проведены стрелки ко всем кругам с меньшими номерами: из восьмого — 7 стрелок, из седьмого — 6 и т.д.. Всего таких стрелок $7+6+5+4+3+2+1 = 28$. Покрасим их в красный цвет, а оставшиеся 5 стрелок — в синий.

Заметим, что радиусы двух кругов равны тогда и только тогда, когда эти круги связаны двумя противоположно направленными стрелками. Поскольку любые два круга связаны ровно одной красной стрелкой, это означает, что равны в точности те круги, которые связаны синей стрелкой.

Допустим, среди кругов нет трёх равных. Тогда каждый круг связан синей стрелкой (входящей или исходящей) не более чем с одним другим кругом. Но тогда синих стрелок не более, чем $8:2 = 4$. Противоречие.

Указания по оценке. Доказано только, что если все числа различны, то стрелок 28 — *1 балл*. «Доказательство» построением примера, когда стрелок ровно 33 — *0 баллов*. Без обоснования утверждается, что максимум стрелочек при отсутствии трёх и более равных кругов равен 32 — *3 балла*.