Четвёртый тур дистанционного этапа олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач и указания по оценке решений

1. *Назовем неотрицательное целое число зеброй, если в его записи строго чередуются четные и нечетные цифры. Может ли разность двух 100-значных зебр быть 100-значной зеброй*?

Ответ: Да. Решение. Вот один из многих возможных примеров: 5050…50 – 2525…25 = 2525…25.

Указания по оценке. Очевидно правильный пример, либо правильный пример с обоснованием правильности — *7 баллов*. Верный пример, для обоснования которого требуются дополнительные вычисления, не проведённые автором — *5-6 баллов, в зависимости от трудности оставшейся части обоснования*. Идея построения примера без конкретного примера — *1 балл*.

2. *Правильный треугольник со стороной 2 разбит на треугольники со стороной 1. В вершины этих треугольников положены 6 одинаковых с виду монет. Известно, что две из них фальшивые, легче настоящих, и лежат в концах единичного отрезка. Как найти обе фальшивые монеты за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь? (Фальшивые весят одинаково, настоящие — тоже).*

Решение. Пусть в вершинах треугольника лежат монеты a, b, c, а напротив них в серединах сторон a_1, b_1, c_1 соответственно. Взвешиваем пары (a, a_1) и (b, b_1). Если их веса равны, то в каждой их этих пар есть по одной фальшивой монете (c и c_1 одновременно фальшивыми быть не могут). Вторым взвешиванием сравниваем a и b. Если их веса не равны, то та, которая легче — фальшивая, а вторая фальшивая та, что соседняя с ней из монет a_1, b_1. Если же их веса равны, то обе они — настоящие, а фальшивые — a_1 и b_1.

Пусть какая-то из пар легче, например, $(a,a_1) < (b,b_1)$. Тогда в паре (a,a_1) ровно одна фальшивая, а в (b,b_1) обе настоящие. Вторым взвешиванием сравниваем a и c. Если c легче, то фальшивые — c и a_1. Если a легче, то фальшивые a и c_1. Если a и c весят одинаково, то обе они — настоящие, а фальшивые — a_1 и c_1.

Указания по оценке. Алгоритм верный, но один из возможных случаев не разобран — *не более 3 баллов*. За пробелы в обосновании, если все случаи разобраны, *снимается до 2 баллов*.

3. *Вот четыре свойства четырёхугольников:*

(1) противоположные стороны попарно равны;

(2) две противоположных стороны параллельны;

(3) какие-то две соседние стороны равны;

(4) диагонали перпендикулярны и делятся точкой пересечения в одном и том же отношении.

Один из двух данных четырёхугольников обладает какими-то двумя из этих свойств, другой — двумя остальными. Докажите, что один из этих двух четырёхугольников — ромб.

Решение. Нетрудно проверить, что четырехугольники со свойствами (1)+(3), либо (3)+(4), либо (1)+(4) — ромбы (в работах участников это, разумеется, должно быть доказано). Осталось заметить, что при любом разбиении данных четырех свойств на две пары среди пар будет присутствовать одна из трёх перечисленных выше.

Указания по оценке. Рассмотрены три случая, но один из них разобран неверно — *4 балла*. Один из трёх случаев вовсе не рассмотрен — *не более 3 баллов*. Верно разобран только один случай — *1 балл*.

4. *На авторынке можно обменять три автомобиля Жигули на одну Волгу и один Мерседес, а три Волги на два Жигули и один Мерседес. Сможет ли коллекционер Вася, имея 700 Жигулей, получить 400 Мерседесов?*

Ответ: Нет. Решение. Оценим Жигули в 4 рубля, Волгу — в 5 рублей, Мерседес — в 7 рублей. Тогда при любых обменах суммарная стоимость Васиных автомобилей будет сохраняться. Суммарная стоимость 400 Мерседесов в точности равна суммарной стоимости 700 Жигулей, но обменять Жигули на одни Мерседесы невозможно, потому что при таких правилах обмена всегда вместе с Мерседесом появляется еще хотя бы одна другая машина.

Примечание. «Цены» машин находятся как любое из решений системы уравнений $3Ж = В+М$, $3В = 2Ж+М$.

Указания по оценке. Введено понятие стоимости, верно составлена система уравнений, показано, что $7Ж = 4М$, но дальнейшего содержательного продвижения нет — *3 балла*. Введено понятие стоимости, найден хотя бы один набор стоимостей, сохраняющийся при обменах, дальнейшего содержательного продвижения нет — *3 балла*. Введено понятие стоимости, верно составлена система уравнений, дальнейшего содержательного продвижения нет — *2 балла*. Ответ «да» с обоснованием в виде добавления чужой машины с последующей отдачей при отсутствии разбора задачи в верной трактовке — *1 балл*.

5. *Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного числа, а Вася — сумму всех чётных делителей этого числа. Могло ли произведение этих двух сумм оказаться квадратом натурального числа?*

Ответ: Нет. Решение. Запишем исходное чётное число в виде $N = 2^n(2m+1)$. Ясно что сумма всех нечётных делителей данного числа равна сумме всех делителей числа $2m+1$. Обозначим эту сумму через S. Тогда сумму всех чётных делителей числа N равняется $2S+4S+\ldots+2^nS$, а произведение суммы всех чётных делителей на сумму всех нечётных делителей равно $S^2(2+4+\ldots+2^n)$. Для того, чтобы это произведение было квадратом, необходимо, чтобы квадратом была сумма, стоящая в скобках. Но эта сумма делится на 2 и не делится на 4.

Указания по оценке. Верно найдено произведение двух сумм, но не доказано, что оно не может быть квадратом — *3 балла*. Обнаружено взаимно однозначное соответствие между нечётным делителем и чётными делителями с разными степенями двойки в разложениями (a, $2a$, $4a$ и т.д., до максимальной степени двойки, входящей в исходное число), дальнейшего содержательного продвижения нет — *2 балла*. Обнаружено взаимно однозначное соответствие между нечётными делителем и чётным делителем с единственной двойкой в разложении (a и $2a$), дальнейшего содержательного продвижения нет — *1 балл*.