

Четвёртый тур дистанционного этапа олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. Назовем неотрицательное целое число зеброй, если в его записи строго чередуются четные и нечетные цифры. Может ли разность двух 100-значных зебр быть 100-значной зеброй?

2. Правильный треугольник со стороной 2 разбит на треугольники со стороной 1. В вершины этих треугольников положены 6 одинаковых с виду монет. Известно, что две из них фальшивые, легче настоящих, и лежат в концах единичного отрезка. Как найти обе фальшивые монеты за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь? (Фальшивые весят одинаково, настоящие — тоже).

3. Вот четыре свойства четырёхугольников:

(1) противоположные стороны попарно равны;

(2) две противоположных стороны параллельны;

(3) какие-то две соседние стороны равны;

(4) диагонали перпендикулярны и делятся точкой пересечения в одном и том же отношении.

Один из двух данных четырёхугольников обладает какими-то двумя из этих свойств, другой — двумя остальными. Докажите, что один из этих двух четырёхугольников — ромб.

4. На авторынке можно обменять три автомобиля Жигули на одну Волгу и один Мерседес, а три Волги на два Жигули и один Мерседес. Сможет ли коллекционер Вася, имея 700 Жигулей, получить 400 Мерседесов?

5. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного числа, а Вася — сумму всех чётных делителей этого числа. Могло ли произведение этих двух сумм оказаться квадратом натурального числа?