III олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап
Решения заданий первого дня.

1. Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ найдутся такие натуральные числа a, b, c, d, что $a+b = c+d = ab–cd = 4n$. (*С. Берлов*)

Решение. Положим $a = 2n+x$, $b = 2n–x$, $c = 2n+y$, $d = 2n–y$. Тогда равенство перепишется в виде $y^2–x^2 = 4n$. Теперь предположим, что $y+x = 2n$, $y–x = 2$. Получим $x = n–1$, $y = n+1$, откуда $a = 3n–1$, $b = n+1$, $c = 3n+1$, $d = n–1$.

2. За круглым столом сидят 40 человек. Может ли случиться, что у любых двух из них, между которыми сидит четное число человек, есть за столом общий знакомый, а у любых двух, между которыми сидит нечетное число человек, общего знакомого нет? (*А. Шаповалов*)

Ответ. Не может. **Первое решение**. Заметим, что если между А и В сидят a человек, а между В и Б сидят b человек, то между А и Б сидит $a+b+1$ или $|a–b|–1$ человек. Поэтому если числа a и b имеют одинаковую чётность, то между А и Б сидит нечётное число человек. Допустим, есть человек В, имеющий хотя бы троих знакомых. Тогда среди них найдутся такие знакомые А и Б, что числа a и b имеют одинаковую чётность, и у них будет общий знакомый В, хотя между ними сидит нечётное число человек. Если же у каждого сидящего не более двух знакомых, то для каждого найдутся максимум двое, с которыми у него есть общие знакомые, а по условию таких должно быть 20 человек. **Второе решение**. Предположим противное. Возьмём любого из сидящих. Через четное число человек от него сидит 20 человек. Как было показано в первом решении, между собой эти люди сидят через нечетное число человек, поэтому не могут иметь общих знакомых. Значит, потребуется 20 *различных* общих знакомых взятого нами человека с этими людьми, то есть у каждого из сидящих есть среди них не меньше 20 знакомых. Но тогда, как легко видеть, у любых двух из сидящих есть общий знакомый — противоречие.

3. Имеются три литровых банки и мерка объемом 100 мл. Первая банка пуста, во второй — 700 мл сладкого чая, в третьей — 800 мл сладкого чая. При этом во второй банке растворено 50 г сахара, а в третьей — 60 г сахара. Разрешается набрать из любой банки полную мерку чая и перелить весь этот чай в любую другую банку. Можно ли несколькими такими переливаниями добиться, чтобы первая банка была пуста, а количество сахара во второй банке равнялось количеству сахара в третьей банке? (*В. Шевяков*)

Ответ. Нельзя. **Решение**. Исходная концентрация сахара во второй банке составляет $50/700 = 1/14$, а в третьей — $60/800 = 3/40$. Поскольку $3/40 > 1/14$, после любых переливаний концентрация сахара в каждой непустой банке будет не больше 3/40. Заметим, что по условию после любых переливаний количество чая в каждой банке кратно 100 мл. Поэтому если весь чай оказался во второй и третьей банках, то в одной из них его не больше 700 мл. Допустим, в ней оказалась половина всего сахара. Тогда его концентрация в ней не меньше, чем $55/700 = 11/140 > 3/40$, что невозможно.

4. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = CD$, выбрана точка P таким образом, что сумма углов PBA и PCD равна 180 градусам. Докажите, что $PB+PC < AD$. (*С. Берлов*)

Решение. Построим на продолжении луча PC за точку C точку K таким образом, что $CK = BP$. Тогда треугольники ABP и DCK будут равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $DK = AP$ и $\angle BAP = \angle CDK$. Построим параллелограмм $PKDL$. Так как $\angle ABC+\angle BCD > 180°$, то $\angle BAD+\angle ADC < 180°$, откуда $\angle APD = 180°–\angle PAD–\angle PDA > \angle BAP+\angle PDC = \angle PDK = \angle DPL$. Следовательно, луч PL пойдет внутрь угла APD. Но $AP = DK = LP$, поэтому точка D будет с той же стороны от серединного перпендикуляра к AL, что и точка L. Поэтому $AD > DL = PK = PC+PB$.