III олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. 100 идущих подряд натуральных чисел отсортировали по возрастанию суммы цифр, а числа с одинаковой суммой цифр — просто по возрастанию. Могли ли числа 2010 и 2011 оказаться рядом? (*С. Волчёнков*)

Ответ. Не могли. **Решение**. Пусть числа 2010 и 2011 оказались рядом. Это значит, что среди 100 взятых чисел 2010 — самое большое число с суммой цифр 3, а 2011 — самое маленькое число с суммой цифр 4. Но это значит, что среди взятых 100 идущих подряд натуральных чисел есть числа 2010 и 2011, но нет ни числа 2002, ни числа 2100, что, очевидно, невозможно.

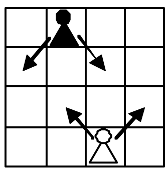
6. Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AC \parallel DE$, $CE \perp BC$. Докажите, что EC — биссектриса угла BED. (*П. Кожевников*)

Решение. Продлим отрезок DE до пересечения с прямой BC в точке K. Из условия следует, что $ABCD$ и $ADKC$ — параллелограммы, откуда $BC = AD = CK$. Таким образом, EC — медиана и высота, а, значит, и биссектриса в треугольнике BEK.

7. По окружности записали красным пять несократимых дробей с нечетными знаменателями, большими 10^{10}. Между каждыми двумя соседними красными дробями вписали синим несократимую запись их суммы. Могло ли случиться, что у синих дробей все знаменатели меньше 100? (*И. Богданов*)

Ответ. Не могло. **Первое решение**. Предположим противное. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 — исходные дроби в порядке их следования по кругу, и знаменатель числа a_1 больше 10^{10}. Заметим, что $2a_1 = (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_1)-(a_2+a_3)-(a_4+a_5)$. Последнее выражение есть алгебраическая сумма пяти дробей со знаменателями, не превосходящими 100. Очевидно, знаменатель в несократимой записи суммы не превосходит произведения знаменателей в несократимой записи слагаемых. Значит, знаменатель в несократимой записи $2a_1$ не больше $100^5 = 10^{10}$. С другой стороны, поскольку знаменатель a_1 нечётен, он равен знаменателю числа $2a_1$. Итак, он тоже не больше 10^{10} — противоречие.
Второе решение. Снова обозначим наши числа $a_1, \ldots, a_5$. Пусть q — наименьшее общее кратное их знаменателей в несократимой записи, и $a_i = b_i/q$. Положим также $s_i = a_i+a_{i+1}$ (считая $a_6 = a_1$). Очевидно, $q > 10^{10}$. Пусть p — один из делителей числа q, причем q делится на p^k, но не на p^{k+1}. Покажем, что один из знаменателей в несократимых записях чисел s_i делится на p^k. Допустим, знаменатели чисел s_i не делятся на p^k. Тогда все b_i+b_{i+1} делятся на p. Поскольку одно из чисел b_i не делится на p, то и ни одно из них не делится, поскольку $b_1 \equiv -b_2 \equiv b_3 \equiv -b_4 \equiv b_5 \equiv -b_1 \pmod p$. Но отсюда следует также, что $2b_1$ делится на p, а этого не может быть, поскольку p нечётно. Из оказанного следует, что произведение знаменателей чисел s_i делится на q; но тогда оно больше 10^{10}, а, значит, один из сомножителей больше 100.

8. Какое наибольшее количество белых и чёрных пешек можно расставить на клетчатой доске 9x9 (пешку, независимо от её цвета, можно ставить на любую клетку доски) так, чтобы никакая не била никакую (в том числе и своего цвета)? Белая пешка бьет две соседние по диагонали клетки на соседней горизонтали с бóльшим номером, а чёрная — две соседние по диагонали клетки на соседней горизонтали с меньшим номером (см. рисунок). (*А. Антропов*)



Ответ. 56. **Решение**. *Пример* с 56 пешками показан на рисунке. *Оценка*. Заметим, что в каждом прямоугольнике из трех строк и двух столбцов стоит не более 4 пешек. Действительно, если в нем стоит хотя бы 5, то тогда на одном из цветов заняты все три клетки и пешка из центральной строки бьет одну из двух оставшихся. Следовательно, в любом прямоугольнике из 9 строк и 8 столбцов стоит не более 48 пешек (так как его можно разбить на 12 прямоугольников 3×2). Допустим, нам удалось поставить 57 пешек. Тогда в девятом столбце должно стоять хотя бы 9 пешек, т.е. ровно 9. Но тогда в восьмом столбце стоит не более 2 пешек (так иначе нашлась бы пешка, стоящая не в первой и не в последней строке, которая бы била какую-то пешку из девятого столбца). Но тогда в восьмом и девятом столбцах вместе не более 11 пешек, а во 2-7 столбцах — не более 36 пешек (их можно разбить на 9 прямоугольников 3×2). Получается, что в первом столбце должно быть 10 пешек — противоречие.