III МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, критерии проверки

1. *На доске нарисованы три четырёхугольника. Петя сказал: «На доске нарисованы по крайней мере две трапеции». Вася сказал: «На доске нарисованы по крайней мере два прямоугольника». Коля сказал: «На доске нарисованы по крайней мере два ромба». Известно, что один из мальчиков сказал неправду, а двое других — правду. Докажите, что среди нарисованных на доске четырёхугольников есть квадрат. (Напомним, что трапеция — это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие — нет.)* (*И. Рубанов*)

Решение. Трапеция не может быть параллелограммом. Поэтому, если Петя прав, то на доске нарисовано не больше одного параллелограмма, и Вася с Колей оба неправы. Но по условию неправду сказал только один человек. Значит, это Петя, а Вася и Коля сказали правду. Но это значит, что по крайней мере один из трёх нарисованных на доске четырёхугольников одновременно является прямоугольником и ромбом, то есть квадратом.

Критерии. Сформулировано в явном виде утверждение, эквивалентное такому: "рассмотрим фигуры из двух верных утверждений. Тогда одна фигура обладает обоими свойствами", дальнейшего содержательного продвижения нет — *1 балл*.

Проверено только, что в случае «Петя солгал» и «Квадрат— это ромб и прямоугольник одновременно» не возникает противоречий — *2 балла*.

Доказано только, что Петя лжёт — *4 балла*.

Словосочетание «по крайней мере два» прочитано как «ровно два», и решена формально более простая задача — *не снижать*.

«Если Петя неправ, то одна фигура прямоугольник и ромб» и аналогично про других, без более подробного объяснения почему такая найдется — *не снижать*.

2. *Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Докажите, что какие-то два из исходных чисел совпадают.* (*Л. Емельянов*)

Первое решение. Обозначим наши числа a, b, c. Тогда $a+b^2+c^2 = a^2+b+c^2 = a^2+b^2+c$. Из первых двух равенств имеем $a^2-a = b^2-b$, что равносильно равенству $(a-b)(a+b-1) = 0$. Значит, $a = b$ или $b = 1-a$. Аналогично, $a = c$ или $c = 1-a$. Следовательно, если $a \neq b$ и $a \neq c$, то $b = 1-a = c$, то есть в любом случае два числа равны.

Второе решение. Обозначим наши числа a, b, c. Тогда $a+b^2+c^2 = a^2+b+c^2 = a^2+b^2+c$. Отсюда $a^2-a = b^2-b = c^2-c = d$ (где d – некоторое число), т.е. числа a, b и c — решения уравнения $x^2-x = d$. Но квадратное уравнение имеет не более двух решений. Это и значит, что хотя бы два из наших чисел равны.

Критерии. Если в работе утверждается, что в любом таком примере все числа обязательно равны, решение оценивается *не выше, чем в 3 балла*.

Из равенств типа (a-b)(a+b) = a–b без дополнительных оговорок "сокращением" получено равенство a+b=1 (всё остальное в решении верно; в частности, там не утверждается без всяких оговорок, что все числа обязательно равны) — *5 баллов*.

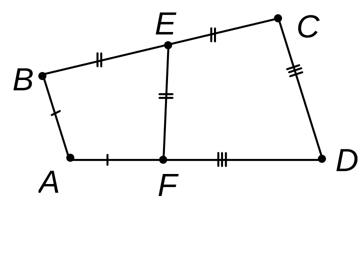
Получена (по сути) система совокупностей вида {a=b или a+b=1}, после неё сразу записано "значит, либо все равны, либо два равны (a=b), а третье = 1-a" без всяких объяснений — *5 баллов*.

Получена (по сути) система совокупностей вида {a=b или a+b=1}, дальнейшего содержательного продвижения нет — *3 балла*.

Получено равенство (a-b)(a+b)=a-b или (a-b)(a+b-1)=0 без дальнейшего содержательного продвижения — *1 балл*.

Получено равенство a(1-a)=b(1-b) (=c(1-c)) без дальнейшего содержательного продвижения -— *0 баллов*

3. *Дан выпуклый четырёхугольник ABCD такой, что AD = AB+CD. Оказалось, что биссектриса угла A проходит через середину стороны BC. Докажите, что биссектриса угла D также проходит через середину BC.* (*Р. Женодаров*)



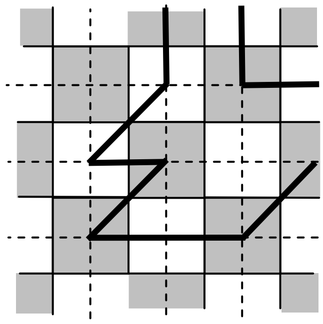
Решение. Пусть E — середина BC. Отметим на стороне AD точку F такую, что $AB = AF$; тогда из условия $FD = AD-AF = CD$. Треугольники AEB и AEF равны по двум сторонам ($AB = AF$, AE — общая) и углу между ними. Значит, $EF = BE = EC$. Теперь получаем, что треугольники DEF и DEC равны по трём сторонам, откуда $\angle EDF = \angle EDC$, и точка E лежит на биссектрисе угла D, что и требовалось доказать. **Замечание**. Несложно показать, что $AB \parallel CD$. Действительно, $\angle ABE = \angle AFE = 180° \angle DFE = \angle DCE$, то есть сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

Критерии. На AD отмечена точка F такая, что AF=AB (и DF=DC) без дальнейшего содержательного продвижения — *0 баллов*.

Отмечена точка F и показано, что EB=EF=EC, где E – середина BC — *4 балла*.

Наличие или отсутствие доказательства, что AB||CD, *оценки не меняет*.

4. *Через центры некоторых клеток шахматной доски 8x8 проведена замкнутая ломаная без самопересечений. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченной ею части доски общая площадь чёрных кусков равна общей площади белых кусков.* (*Д Храмцов*)



Первое решение. Проведём пунктиром вертикальные и горизонтальные линии через центры клеток доски. На получившейся пунктирной сетке каждое звено нашей ломаной соединяет узлы, соседние по вертикали, горизонтали или диагонали. Поэтому пунктирные прямые разбивают область, ограниченную ломаной, на единичные квадратики и половинки квадратиков, получаемые разрезанием их по диагонали. Осталось заметить, что в каждом таком квадратике и в каждом таком треугольнике площади чёрной и белой частей равны. Действительно, каждый квадратик содержит по две четверти клеток обоих цветов, а треугольник — четверть клетки одного цвета и два треугольничка, каждый из которых составляет восьмую часть клетки другого цвета.
Второе решение. Рассмотрим новую квадратную сетку, образованную вертикальными и горизонтальные линиями, проходящими через центры клеток доски. Каждый квадрат этой сетки разрежем диагоналями на четыре треугольника. Очевидно, каждый получившийся треугольник наполовину белый, а наполовину – черный. С другой стороны, фигура, ограниченная ломаной, состоит из таких треугольников, поскольку по условию она ни одного из них не пересекает.

Критерии. Рассмотрение некоторых конкретных ломаных без описания общей идеи решения — *0 баллов*.

Только идея, что в треугольнике и квадратике, упомянутых в решении, Ч=Б — *1 балл*; дополнительно без обоснования утверждается, что фигуру можно разбить на такие треугольники и квадраты — *3 балла*; содержательные продвижения в обосновании добавляют к этой тройке *от 1 до 4 баллов*; ссылка на квадратную сетку с узлами в центрах исходных квадратиков считается полным обоснованием.

5. *Бизнесмен Борис Михайлович решил устроить с трактористом Васей гонки по шоссе. Поскольку его «Лексус» едет вдесятеро быстрее Васиного трактора, он дал Васе фору и выехал через час после Васи. После того, как Васин трактор проехал ровно половину запланированной трассы, у него отвалилась рессора, поэтому оставшуюся часть пути Вася проехал вдвое медленнее, чем первую. В результате встречи с Васиной рессорой Борису Михайловичу пришлось заехать в оказавшийся рядом сервис на 4 часа, после чего он продолжил путь вдвое медленнее, чем раньше. Докажите, что в результате он отстал от Васи не менее, чем на час.* (*С. Берлов*)

Первое решение. Поскольку Борис встретился с Васиной рессорой, то к середине пути он Васю еще не догнал. Ясно, что в нормальных условиях он догнал бы Васю через 10/9 часа; значит, Вася проехал первую половину пути за $10/9-a$ часов при некотором $a \geq 0$, а тогда весь путь он проделал за $10/3-3a$ часов. Борис же первую половину пути проехал за $1/9-a/10$ часов, а вторую — вдвое медленнее, тогда на весь путь он затратил $4+1/3-3a/10 \geq 1+(10/3-3a)$ часов, что и требовалось.
Второе решение. По условию одного часа форы Васе достаточно, чтобы Борис его не догнал на первой половине пути. Значит, на второй половине пути (где все скорости уменьшились вдвое) Васе достаточно 2 часов форы. А он имеет, как минимум, фору в 4 часа (которые Борис провел в сервисе). Значит, Борис завершит гонку не ранее, чем через 2 часа после Васи.

Критерии. В приведённых решениях показано, что Борис Михайлович потратил на весь путь по крайней мере на час больше, чем Вася (то есть, с учётом форы, финишировал по крайней мере на *два* часа позже Васи). Именно такое утверждение имел в виду автор задачи. Но её формулировка получилась двусмысленной, и многие участники доказывали, что БМ *финишировал* по крайней мере на час позже Васи. Поскольку вины участников тут нет, решено *расценивать каждую из двух возможных трактовок, как верную, и оценивать решения, исходя из того, в какой из них решали задачу их авторы*.

Рассмотрение «худшего случая», когда рессора выпала прямо под бампер «лексуса» *без объяснения, почему этот случай действительно «худший» (то есть, если утверждение задачи верно для него, то ого верно и для всех остальных случаев) — не более 3 баллов*.

Получено только условие (3) из следующих трех условий: (1) выражение для времени Васи; (2) выражение для времени Бориса (3) условие на рессору (Борис проедет середину пути позже Васи). — *1 балл*; получены все три условия, дальнейшего содержательного продвижения нет — *2 балла*. Условия (1) и (2) без условия (3) *не оцениваются*.

За рассмотрение строгих неравенств вместо нестрогих *оценку не снижать*.

6. *На доске написано число 1. Если на доске написано число a, его можно заменить любым числом вида a+d, где d взаимно просто с a и 10 ≤ d ≤ 20. Можно ли через несколько таких операций получить на доске число 18! = 1·2·3·...·18?* (*И. Рубанов*)

Первое решение. Заметим, что число 18!–19 оканчивается на 1. Будем прибавлять к числу на доске 10. При этом каждый раз будет получаться число, оканчивающееся на 1, и, следовательно, взаимно простое с числом 10, так что операция возможна. В конце концов на доске появится число 18!–19. Мы прибавим к нему 19 и получим 18!.

Второе решение. Ясно, что 18! не делится на 19. Тогда и 18!-19k не делится на 19 при любом натуральном k. Теперь, если мы научимся получать числа, имеющие все возможные ненулевые остатки от деления на 19, то, прибавляя по 19 к одному из них, мы сумеем получить 18!. (В частности, достаточно было бы уметь получать какие-то 19 последовательных чисел.) Научимся это делать. Числа от 11 до 21 получаются одной операцией. Числа вида 22+n при 0 < n < 10 получаются как 1+10+(11+n). Число 22 получить не удаётся, зато получается число 41 того же остатка, например, 41 = 1+10+16+14.

Третье решение. По теореме Вильсона 18! ≡ 18 (mod 19). Поэтому достаточно на первом шаге получить 18 = 1 + 17, а далее прибавлять по 19.

Четвертое решение. 18! – 19 ≡ 17 (mod 18). Поэтому достаточно на первом шаге получить 17 = 1+16 и далее прибавлять по 18, пока не получится 18! – 19. Теперь можно прибавить 19.

Критерии. Доказано, что 18! можно получить только из 18!-19, дальнейшего содержательного продвижения нет — *1 балл*.

Полностью верный алгоритм безо всяких обоснований — *4 балла*. Задача сведена к получению остатка от деления 18! на 19, но остаток найден неверно — *не более 1 балла*.

Для обоснования алгоритма **из первого решения** нужно доказать следующие три (или равносильные им) утверждения: (1) все промежуточные числа взаимно просты с 10; (2) последнее число взаимно просто с 19; (3) 18! оканчивается на 0 (на это утверждение достаточно в правильный момент сослаться). За отсутствие каждого из обоснований в (1) и (2) и отсутствие ссылки в (3) *снимается по 1 баллу*.

При втором решении. Отсутствует обоснование того, что 18!-19k взаимно просто с 19 — *минус 1 балл*. Задача сведена (с обоснованием) к получению чисел, дающих все ненулевые остатки от деления на 19, не более трёх остатков не получены или получены неверно — *4 балла*. То же, более трёх остатков не получены или получены неверно — *3 балла*.

7. *Для четырёх различных целых чисел подсчитали все их попарные суммы и попарные произведения. Полученные суммы и произведения выписали на доску. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться на доске?* (*И. Рубанов*)

Ответ. 6. **Решение**. Если взять числа –1, 0, 1, 2, то, как легко проверить, каждое из записанных на доске чисел будет равно −2, −1, 0, 1, 2 или 3 — всего 6 различных значений. Покажем, что меньше шести различных чисел на доске оказаться не могло. Пусть взяты числа $a < b < c < d$. Тогда выполнены неравенства $a+b < a+c < a+d < b+d < c+d$, что даёт пять различных чисел.

Осталось доказать, что на доске есть число, отличное от этих пяти. Мы покажем, что на доске найдётся либо число, большее $c+d$, либо число, меньшее $a+b$. Если $a \geq 0$, то $b \geq 1$, $c \geq 2$, $d \geq 3$, поэтому $cd \geq 2d > c+d$. Если $a < 0$, а $d \geq 2$, то $ad \leq 2a < a+b$. В оставшемся случае имеем $a < 0$ и $d \leq 1$.

Но тогда $c \le 0$, $b \le -1$, $a \le -2$, откуда $ab \ge 2 > c+d$. **Вариант завершения решения**. Пусть u и v – два наибольших по модулю числа, причем $|u| \le |v|$. Если $|u| \ge 2$, то $|uv| \ge 2|v|$, а это больше, чем любая сумма. Если же $|u| \le 1$, то среди исходных чисел должны быть –1, 0, 1. При $v > 0$ на доске выписано по крайней мере 6 различных чисел: –1, 0, 1, v, $-v$, $v + 1$. Случай $v < 0$ разбирается аналогично.

Критерии. Только ответ — *0 баллов*.

Верный пример на 6 — *2 балла*.

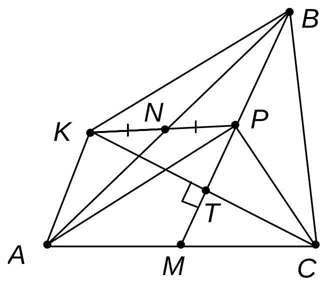
Доказано, что значений не меньше пяти, других содержательных продвижений нет — *1 балл*.

Доказано, что различных чисел не меньше 6, но примера нет — *3 балла*.

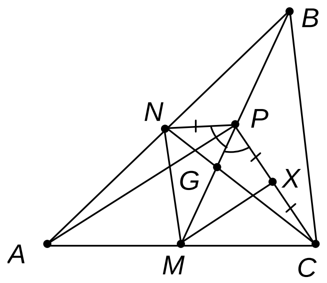
Верный пример на 6 и доказательство, что значений не меньше пяти, без дальнейшего содержательного продвижения — *3 балла*.

То же плюс содержательное, но неполное продвижение в доказательстве существования шестого значения — *4 балла*.

8. *В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и AB соответственно. На медиане BM выбрана точка P, не лежащая на CN. Оказалось, что $PC = 2PN$. Докажите, что $AP = BC$.* (*С. Берлов*)



Первое решение. Отметим точку K такую, что $AKBP$ — параллелограмм. Тогда его диагонали делятся точкой пересечения пополам, то есть пересекаются в точке N и $PK = 2PN = PC$. Пусть прямые MB и CK пересекаются в точке T. Поскольку $MT \parallel AK$ и M — середина AC, то MT — средняя линия треугольника AKC, откуда $KT = TC$. Значит, PT — медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника KPC, откуда $PT \perp CK$. Тогда BT — медиана и высота треугольника BKC, значит, $BC = BK$. Наконец, $BK = AP$ так как $AKBP$ — параллелограмм, откуда $AP = BK = BC$.



Второе решение. Обозначим через G точку пересечения медиан треугольника ABC. Тогда $CG/GN = 2 = CP/PN$, то есть точка G делит сторону NC треугольника PNC в отношении, равном отношению прилежащих боковых сторон. По признаку биссектрисы получаем $\angle CPG = \angle GPN$. Следовательно, $\angle BPN = \angle BPC$. Пусть X — середина PC. Тогда $PX = PN$, поэтому $\Delta NPM = \Delta XPM$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $NM = XM$. Наконец, отрезки XM и NM являются средними линиями в треугольниках APC и ABC, значит, $AP = 2XM = 2NM = BC$.

Третье решение. Рассмотрим такую точку Q, что P — середина AQ. Тогда $BP \| QC$, $BQ = 2NP = PC$, т.е. $BQCP$ – равнобочная трапеция ($BQ \parallel NP \Rightarrow$ не параллельна PC). Ее диагонали BC и PQ равны, а $PQ = AP$.

Критерии. Только дополнительное построение: точка K такая, что N — середина отрезка PK (без явного бреда) — *1 балл*.

Только построена середина PC и понято, что достаточно доказать $MN = MX$ (без явных неверных утверждений) — *1 балл*.

Сведение задачи к тому, что BM — биссектриса угла APC, без дальнейшего содержательного продвижения — *2 балла*.

Доказано только, что BM — биссектриса угла APC — *2 балла*.

Используется только одно определённое расположение точки P на BM (до или после точки пересечения медиан) — *оценка не снижается*.