Первый тур дистанционного этапа III олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Назовём два положительных целых числа* ***почти соседними****, если каждое из них делится (без остатка) на их разность. На уроке математики Вову попросили выписать в тетрадь все числа, почти соседние с* 2^{10}*. Сколько чисел ему придётся выписать?*

Ответ: 21. Решение. Число 2^{10} делится только на степени двойки: от 2^0 до 2^{10}. Поэтому почти соседними с ним могут быть только числа $2^{10}–2^9$, $2^{10}–2^8$, …, $2^{10}–2^0$, $2^{10}+2^0$, …, $2^{10}+2^{10}$ (число $0 = 2^{10}–2^{10}$ не подходит, так как не положительно). С другой стороны, легко видеть, что все эти числа действительно являются почти соседними с 2^{10}. Замечание. Из-за проблем с правильным отображением формул довольно многие участники вместо «2^{10}» прочитали в условии задачи «210». Задача для этого числа решается аналогично, ответ — 31.

2. *Точки E и F — середины сторон BC и CD соответственно прямоугольника ABCD. Докажите, что AE < 2EF.*

Первое решение. $2EF = BD = AC > AE$. Последнее неравенство следует из того, что угол AEC — тупой. Второе решение. Пусть $BC = 2x$, $CD = 2y$. Тогда $AE^2 = x^2+4y^2 < 4x^2+4y^2 = (2EF)^2$.

3. *Пусть a, b, c — такие целые числа, что $(a+b+c)^2 = –(ab+ac+bc)$ и числа $a+b$, $b+c$, $a+c$ не равны 0. Докажите, что произведение любых двух из чисел $a+b$, $a+c$, $b+c$ делится на третье.*

Решение. $(a+b)(a+c) = a^2+ab+ac+bc = a^2–(a+b+c)^2 = –(b+c)(2a+b+c)$. Другие два случая получаются перестановкой букв.

4. *В ряд выложена 101 карточка. На каждой из 50 карточек, лежащих в этом ряду на чётных местах, нарисован значок > или <. Докажите, что, как бы ни были нарисованы эти значки, можно заполнить остальные карточки числами 1, 2, ... 51 (использовав каждое по разу) так, чтобы все получившиеся неравенства оказались верными.*

Первое решение. Сначала напишем над всеми карточками, лежащими на нечётных местах, по числу. Над первой карточкой напишем число 0. Затем будем двигаться вправо и каждый раз после знака «>» писать число, на 1 меньшее предыдущего, а после знака «<» — число, на 1 большее предыдущего. Очевидно, при этом каждый из знаков неравенства будет направлен от карточки, отмеченной большим числом, к карточке, отмеченной меньшим. Теперь возьмём карточки, отмеченные самым маленьким числом. Пусть их оказалось k_1 штук. Напишем на них произвольным образом числа $1,…, k_1$. На карточках, отмеченных следующим по величине числом — пусть их k_2 штук — напишем числа от k_1+1 до $k_1+ k_2$ и т.д., пока все числа от 1 до 51 не будут написаны. Из построения следует, что все написанные неравенства при этом будут верны.

Второе решение. Будем заполнять пустые карточки последовательно слева направо по такому алгоритму. Если сразу после текущей пустой карточки идет знак <, то пишем в нее самое маленькое из оставшихся чисел; иначе пишем самое большое из оставшихся чисел. При таком алгоритме заполнения все неравенства будут верными. В самом деле, если на текущем шаге написано число b, а до этого было написано число a, то при знаке $a < b$ неравенство верно (так как а по алгоритму a меньше всех стоящих правее чисел, в частности, меньше b), и при $a > b$ неравенство верно (так как по построению a больше всех стоящих правее чисел, в частности, больше b).

5. *Алина обвела на шахматной доске (8x8) 22 различных (но, возможно, перекрывающихся) трёхклеточных прямоугольничка, а Полина — 22 неперекрывающихся двуклеточных прямоугольничка (но, возможно, перекрывающихся с прямоугольничками Алины). Докажите что на доску можно положить крестик из 5 клеток, полностью накрывающий хотя бы две обведённые фигурки. (Крестик может выходить за края доски.)*

Решение. Заметим, что крест накрывает прямоугольник 1x3, если их центральные клетки совпадают, и накрывает прямоугольник 1x2, если центральная клетка креста лежит в прямоугольнике. Отметим центральные клетки длинных прямоугольников и все клетки коротких; всего получилось 66 отмеченных клеток, значит, какая-то отмечена дважды. Если сделать её центральной клеткой креста, он накроет два прямоугольника.