Второй тур дистанционного этапа III олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач и указания по оценке

1. *Алиса и Белый Кролик в полдень вместе вышли из домика Кролика и пошли на прием к Герцогине. Пройдя полпути, Кролик вспомнил, что забыл перчатки и веер, и побежал за ними домой со скоростью в два раза большей, чем он шел вместе с Алисой. Схватив перчатки и веер, он побежал к Герцогине (с той же скоростью, что бежал домой). В результате Алиса (которая всё время шла с одной и той же скоростью) пришла к Герцогине вовремя, а Кролик опоздал на 10 минут. На какое время был назначен прием у Герцогини?*

Ответ. На 12.40. Решение. Бегая за забытыми вещами, Кролик пробежал расстояние, равное пути от его домика до места приёма. Алиса, идя вдвое медленнее, чем бежал Кролик, за это время прошла половину этого пути. Стало быть, когда Кролик добежал до середины пути, Алиса как раз дошла до места приёма. 10 минут, на которые опоздал Кролик, понадобились ему на вторую половину пути. Алиса прошла её вдвое медленнее, то есть за 20 минут, а весь путь — за 40 минут. Отсюда и получаем ответ.

2. *Внутри угла AOB, равного 120°, проведены лучи OC и OD так, что каждый из них является биссектрисой какого-то из углов, получившихся на чертеже. Найдите величину угла AOC. Укажите все возможные варианты.*

Ответ. 30°, 40°, 60°, 80° или 90°.

Решение. Если луч *OC* — биссектриса угла *AOB* (рис. 1), то угол *AOC* равен 60° (независимо от того, является ли луч *OD* биссектрисой угла *AOC* или *BOC)*.

Если луч *OD* — биссектриса угла *AOB* (рис. 2), то угол *AOC* равен 30° (если *OC* — биссектриса угла *AOD)* или 90° (если *OC* — биссектриса угла *BOD)*

Если луч *OC* — биссектриса угла *AOD,* а луч *OD* — биссектриса угла *BOC* (рис. 3), то угол *AOC* равен 60°.

Аналогично, если луч *OD* — биссектриса угла *AOC,* а луч *OC* — биссектриса угла *BOD* (рис. 4), то угол *AOC* равен 80°.

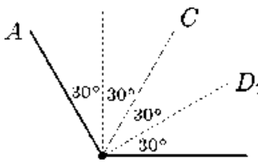

Рис. 1

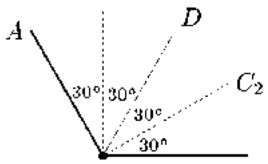

Рис. 2

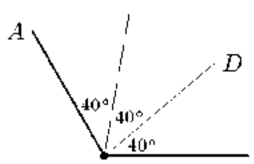

Рис. 3

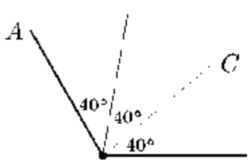

Рис. 4

3. *Найдите все натуральные числа, десятичная запись которых оканчивается на два нуля, имеющие ровно 12 натуральных делителей.*

Ответ. 200 и 500. Решение. Так как запись числа оканчивается на два нуля, оно делится на 100, то есть имеет вид $n\cdot 100 = n\cdot 2^2\cdot 5^2$. Докажем, что если у числа ровно 12 делителей, то n может быть равно только 2 или 5. Наименьшее из чисел вида $n\cdot 2^2\cdot 5^2$ — число 100 (случай $n = 1$) имеет 9 делителей. Их можно найти непосредственно, но можно и так: все делители числа 100 имеют вид $2^k\cdot 5^m$, где k и m могут быть равны 0, 1 или 2. Следовательно, число делителей равно $3\cdot 3 = 9$. Если n не делится ни на 2 ни на 5, то у числа $n\cdot 100$ будет не менее 18 делителей: 9 делителей числа 100 и 9 делителей, получающихся из делителей числа 100 умножением на n. Если $n = 2$ или $n = 5$, то делителей, как легко проверить, будет ровно 12. Если же n делится на 2 или 5 в степени выше первой, то n делится на 200 или 500, и при этом больше 200 или 500 соответственно, поэтому делителей у него больше 12. Отсюда — ответ.

4. *В треугольнике ABC отметили произвольную точку D на медиане BM. Затем через D провели прямую, параллельную AB, а через C — прямую, параллельную BM. Эти прямые пересеклись в точке E. Докажите, что $BE = AD$.*

Решение. Проведём через точку A прямую, параллельную BM, и пусть F — точка её пересечения с прямой DE. По теореме Фалеса из равенства $AM = MC$ следует равенство $FD = DE$. Кроме того, по построению $ABDF$ — параллелограмм, откуда $AB = FD$. Отсюда $AB = DE$, и $ABED$ — параллелограмм, откуда и следует, что $BE = AD$.

5. *На бесконечной шашечной доске на двух соседних по диагонали клетках стоят две черные шашки. Можно ли добавить на доску несколько черных шашек и одну белую шашку так, чтобы белая шашка могла одним ходом съесть все черные шашки (включая и две стоявшие изначально)?*

Напомним, что шашка ест соседнюю по диагонали шашку, перепрыгивая через неё на следующее за ней по диагонали поле (которое должно быть свободно); одним ходом шашка может съесть несколько шашек подряд, причём съеденные шашки не снимаются с доски, пока ход не завершён.

Ответ. Нет. Решение. Перекрасим черные клетки доски в красный и синий цвета через одну (так, чтобы синие клетки граничили по диагонали только с красными, а красные — только с синими). Белая шашка, стоящая на синей клетке, может есть лишь те черные шашки, которые стоят на красных клетках. И наоборот, белая шашка, стоящая на красной клетке, может есть лишь те черные шашки, которые стоят на синих клетках. Однако, из двух изначально поставленных шашек одна стоит на синей клетке, а другая — на красной. Следовательно, одну из этих двух шашек белая съесть не сможет.