Третий тур дистанционного этапа III олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Найдите все пятизначные числа, у которых вторая цифра впятеро больше первой, а произведение всех пяти цифр равно 1000.*

Ответ. 15855, 15585, 15558. Решение**.** Первая цифра может равняться только 1, иначе вторая цифра будет больше 9. Тогда вторая цифра — 5, и получается, что произведение трёх последних цифр должно равняться 200. Поскольку 200 = 5x5x8, две из этих трёх цифр должны равняться 5. Но тогда третья цифра должна быть восьмёркой, откуда и получаем ответ.

2. *Числа a, b и c таковы, что $a > b$ и $(a–b)(b–c)(c–a) > 0$. Что больше: a или c?*

Ответ. $a > c$. Решение**.** Очевидно, среди трёх данных чисел нет равных. Поскольку $a > b$, $a–b > 0$, откуда $(b–c)(c–a) > 0$. Допустим, $c > a$. Тогда $c–a > 0$ и $b–c > 0$, то есть $b > c > a$ — противоречие.

3. *Двое по очереди проводят на плоскости прямые, причем дважды одну прямую проводить нельзя. Выигрывает тот, после хода которого число кусков, на которые плоскость разбита проведенными прямыми, впервые разделится на 5. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнер, и как ему для этого надо играть?*

Ответ. Второй. Первое решение. Второй своим первым ходом проводит прямую, параллельную той, которую провёл первый. Если своим вторым ходом первый проведёт прямую, параллельную двум уже проведённым, после его хода плоскость разобьётся на 4 части. Тогда второй проводит прямую, параллельную трём проведённым, и побеждает: частей получается ровно 5. Если же своим вторым ходом первый проведёт прямую, пересекающую две уже проведённые, после его хода плоскость разобьётся на 6 частей. Тогда второй проводит прямую, пересекающую три уже проведённые в трёх различных точках, и тоже побеждает, потому что частей получается 10. Второе решение. Второй своим первым ходом проводит прямую, пересекающую ту, которую провёл первый. Если своим вторым ходом первый проведёт прямую, параллельную одной из двух проведённых или проходящую через точку их пересечения, после его хода плоскость разобьётся на 6 частей. Тогда второй проводит прямую, пересекающую три уже проведённые в трёх различных точках, и побеждает, потому что частей получается 10. Если же своим вторым ходом первый проведёт прямую, пересекающую обе проведённые в двух различных точках, плоскость разобьётся на 7 частей. Тогда второй проведёт прямую, параллельную одной из проведённых и не проходящую через точки их пересечения, и частей снова получится 10.

4. *На стороне BC треугольника ABC отмечена точка E, а на биссектрисе BD — точка F таким образом, что $EF \parallel AC$ и $AF = AD$. Докажите, что $AB = BE$.*

Решение**.** Из условия задачи следует, что $\angle EFD = \angle ADF = \angle AFD$ (первое равенство верно, так как $EF \parallel AC$, второе — поскольку $AF = AD$). Поэтому равны и углы AFB и EFB, смежные с углами AFD и EFD. Кроме того, по условию $\angle ABF = \angle EBF$. Следовательно, треугольники *BFE* и *BFA* равны по общей стороне *BF* и двум прилежащим к ней углам. Поэтому равны и их соответственные стороны *BE* и *AB*.

5. *В футбольном турнире, где каждая команда по одному разу сыграла с каждой, участвовали команды А, Б, В, Г, Д и Е. За победу команда получала 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0. В итоге оказалось, что команды А, Б, В, Г и Д набрали по 7 очков. Какое наибольшее количество очков могла набрать команда Е?*

	А	*Б*	*В*	*Г*	*Д*	*Е*
А	x	3	3	1	0	0
Б	0	x	3	3	1	0
В	0	0	x	3	3	1
Г	1	0	0	x	3	3
Д	3	1	0	0	x	3
Е	3	3	1	0	0	x

Ответ. 7 очков. Решение**.** В матче, где одна из команд победила, команды вместе набирают 3 очка, в матче, закончившемся вничью — 2 очка. Поскольку 7 не делится на 3, команда, набравшая 7 очков, сделала хотя бы одну ничью. Так как таких команд пять, ничьих в турнире было сделано по крайней мере три. Всего матчей, как легко проверить, было сыграно 15. Поэтому все команды вместе набрали не больше, чем $2\times3+3\times12 = 42$ очка. Из них 35 очков набрали команды А, Б, В, Г и Д. Поэтому команда Е набрала не больше $42–35 = 7$ очков. Как она могла набрать ровно 7 очков, показано в таблице справа.