Четвёртый тур дистанционного этапа III олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач и указания по оценке

1. *У гражданина Сидорова есть ровно столько денег, сколько нужно на покупку тонны кругликов и тонны шмугликов. Если он купит на 20% кругликов больше, то ему сделают 40-процентную скидку на шмуглики, и оставшихся денег на покупку тонны шмугликов ему хватит. А, если он купит на 40% шмугликов больше, то ему сделают 20-процентную скидку на круглики, и оставшихся денег на покупку тонны кругликов ему тоже хватит. Что дороже и во сколько раз: тонна кругликов или тонна шмугликов? (И в том, и другом случае не обязательно будут израсходованы все деньги)*

Ответ. Тонна кругликов стоит вдвое дороже тонны шмугликов. Решение**.** Пусть тонна кругликов стоит x денег, а тонна шмугликов y денег. Тогда у гражданина Сидорова ($x+y$) денег. Если он купит на 20% больше кругликов, а тонну шмугликов купит с 40%-ой скидкой, то он потратит $1{,}2x+0{,}6y$ и это не больше, чем ($x+y$). Если же он купит на 40% шмугликов больше, а тонну кругликов с 20%-ой скидкой, то это будет стоить $1{,}4y+0{,}8x$, и это не больше, чем ($x+y$). Получаем два неравенства: $\begin{cases} 1{,}2x+0{,}6y \le x+y \\ 0{,}8x+1{,}4y \le x+y \end{cases}$. Из первого неравенства следует что $0{,}2x \le 0{,}4y$, т.е. $x \le 2y$. А из второго следует, что $0{,}4y \le 0{,}2x$, т.е. $2y \le x$. Сравнивая два неравенства, приходим к выводу, что $x = 2y$.

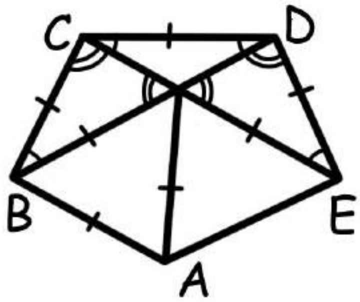
2. *Разделите прямоугольный треугольник с углом 30° на два меньших треугольника так, чтобы какая-то медиана одного из этих треугольников была параллельна одной из биссектрис второго треугольника.*

Решение**.** Пусть в треугольнике ABC угол A равен 30°, а угол B — 60°. Первый способ. Опускаем высоту CD из прямого угла на гипотенузу. Биссектриса угла B параллельна медиане, проведенной из вершины D к стороне AC. Второй способ. Проводим биссектрису BE. Тогда биссектриса (она же медиана и высота) из точки E в треугольнике EAB параллельна медиане из вершины C в треугольнике CBE. *Обоснование параллельности в обоих способах легко проводится подсчётом углов*. Третий способ. Проведем биссектрису BE. Так как $\angle EBA = \angle A = 30°$, то $EA = EB > EC$. Поэтому середина AC точка M лежит на AE, и проведенная через M параллельно BE прямая пересекает отрезок AB в некоторой точке D. Разделим ABC на треугольники CBD и CAD. Тогда биссектриса угла B в CBD лежит на прямой BL и поэтому параллельна медиане DM треугольника CAD.

3. *Три натуральных числа a, b, c подобраны так, что НОД(ab, c) = НОД(a, bc). Докажите, что после сокращения дроби a/c получится несократимая дробь, числитель и знаменатель которой взаимно просты с b.*

Решение. Достаточно доказать, что любое простое число p, входящее в разложение на простые множители числа b, входит в разложение числа a и в разложение числа c в одинаковых (возможно, нулевых) степенях. Докажем это. Действительно, пусть, например, в разложение числа a входит больше множителей p, чем в разложение числа c. Тогда в разложение числа НОД(ab,c) число p входит с тем же показателем, что и в число c. А в НОД(a, cb) входит с большим показателем, потому что и в числе a и в числе cb больше множителей p, чем в числе c. Аналогично разбирается второй случай.

4. *В пятиугольнике ABCDE AB = BC = CD = DE, ∠B = 96□ и ∠C = ∠D = 108□. Найдите угол E.*



<u>Ответ</u>. 102°. <u>Решение</u>**.** Проведем отрезки *BD* и *CE*. Пусть они пересекаются в точке O. Заметим, что треугольники *BCD* и *CDE* равнобедренные с углом 108° при вершине, а значит, углы при основании равны 36° (они отмечены на рисунке одной дугой). Тогда $\angle BCE = \angle BDE = 72°$. Угол *COD* равен 108° (т.к. в треугольнике *COD* два угла по 36°). Поэтому $\angle COB = 180° - 108° = 72°$. Углы по 72° отмечены на рисунке двумя дугами. Получаем, что треугольники *CBO* и *DEO* равнобедренные. Значит, $AB = BO = BC = CD = DE = EO = x$. Заметим, что $\angle OBA = 96° - 36° = 60°$. Значит, треугольник *OBA* равнобедренный с углом 60° при вершине, т.е. равносторонний. Поэтому $AO = x$. Вычислим угол *AOE* $\angle AOE = \angle EOB - \angle AOB = 108° - 60° = 48°$. Треугольник *AOE* равнобедренный с углом 48° при вершине. Поэтому $\angle OEA = (180° - 48°)/2 = 66°$. Получаем, что угол *E* пятиугольника равен $\angle AED = \angle AEO + \angle OED = 66° + 36° = 102$.

5. *Петя раскладывает карточки с числами 1,2,…,9 в клетки таблицы 3×3. Затем он отворачивается, а Витя меняет местами какие-то две карточки из клеток с общей стороной, и переворачивает все карточки лицом вниз. После этого Петя один раз показывает на одну или несколько карточек, а Витя сообщает сумму чисел на них. Сможет ли Петя действовать так, чтобы в результате гарантированно узнать, где какая карточка?*

8	1	2
3	5	9
6	7	4

<u>Ответ</u>. Сможет. <u>Решение</u>**.** Петя раскладывает карточки как нарисовано на рисунке. Потом Вася меняет местами две карточки, переворачивает их лицом вниз, а Петя указывает ему на 4 карточки, которые на рисунке отмечены серым (в них Петя сначала положил 1, 3, 7, 9). Изначально сумма на них была 20. Вася сообщает Пете, какая сумма на них теперь. Легко видеть, что для любых двух различных пар соседних карточек разности между числом на серой карточке и числом на белой карточке различны. Это относится и к тем парам, где повторяется по одной карточке. Значит, по названной сумме Петя легко устанавливает, какие карточки менялись.