Первый тур дистанционного этапа III олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Назовём два положительных целых числа* ***почти соседними****, если каждое из них делится (без остатка) на их разность. На уроке математики Вову попросили выписать в тетрадь все числа, почти соседние с* 2^{10}*. Сколько чисел ему придётся выписать?*

2. *Точки E и F — середины сторон BC и CD соответственно прямоугольника ABCD. Докажите, что* $AE < 2EF$.

3. *Пусть* a, b, c *— такие целые числа, что* $(a+b+c)^2 = -(ab+ac+bc)$ *и числа* $a+b$, $b+c$, $a+c$ *не равны 0. Докажите, что произведение любых двух из чисел* $a+b$, $a+c$, $b+c$ *делится на третье.*

4. *В ряд выложена 101 карточка. На каждой из 50 карточек, лежащих в этом ряду на чётных местах, нарисован значок > или <. Докажите, что, как бы ни были нарисованы эти значки, можно заполнить остальные карточки числами 1, 2, ... 51 (использовав каждое по разу) так, чтобы все получившиеся неравенства оказались верными.*

5. *Алина обвела на шахматной доске (8x8) 22 различных (но, возможно, перекрывающихся) трёхклеточных прямоугольничка, а Полина — 22 неперекрывающихся двуклеточных прямоугольничка (но, возможно, перекрывающихся с прямоугольничками Алины). Докажите что на доску можно положить крестик из 5 клеток, полностью накрывающий хотя бы две обведённые фигурки. (Крестик может выходить за края доски.)*