

IV олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий первого дня.

1. На стороне BC треугольника ABC взята точка D таким образом, что серединный перпендикуляр к отрезку AD проходит через центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что этот перпендикуляр проходит через вершину треугольника ABC . (Л. Емельянов)

Решение. Опустим из центра J вписанной в треугольник окружности перпендикуляр JN на сторону CB . Допустим, точка N лежит на отрезке DC (случай, когда точка N лежит на отрезке DB , разбирается аналогично.). Опустим из центра J перпендикуляр JM на сторону CA . Поскольку $JA = JD$ и $JM = JN$, прямоугольные треугольники JMA и JND равны. Поэтому $AM = DN$. Складывая это равенство с равенством $CM = CN$, получаем $CA = CD$. Осталось заметить, что серединный перпендикуляр к основанию AD равнобедренного треугольника CAD проходит через его вершину C , что и требовалось доказать.

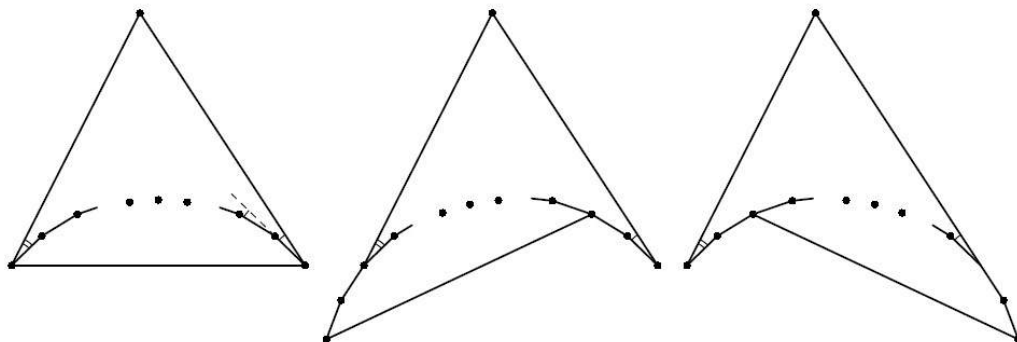
2. Олег и Сергей по очереди выписывают слева направо по одной цифре, пока не получится девятизначное число. При этом нельзя выписывать цифры, которые уже выписаны. Начинает (и заканчивает) Олег. Олег побеждает, если полученное число кратно 4, в противном случае побеждает Сергей. Кто победит при правильной игре? (О. Дмитриев, Р. Женодаров)

Ответ. Сергей. **Первое решение.** За первые три своих хода Сергей может добиться того, что обязательно будут использованы цифры 2 и 6 и еще какая-то чётная цифра, например, 0. Своим последним ходом Сергей ставит любую еще не использованную нечётную цифру. Если Олег последней поставит нечётную цифру, то число будет нечётным. Если же он поставит одну из оставшихся чётных — 4 или 8, то число будет чётно, но не кратно 4. В обоих случаях Олег проигрывает. **Второе решение.** За первые три своих хода Сергей может добиться того, что обязательно будут использованы цифры: 4, 8, 0. Тогда перед его последним ходом возможны два варианта. Первый: ещё не использована цифра 2. Тогда он ставит цифру 2 и Олег может поставить на конце числа только 6 (иначе число не делится даже на 2), но такое число не делится на 4. Второй: цифра 2 использована. Тогда осталась максимум одна чётная цифра — 6. Сергей ставит её, а если её нет, то любую оставшуюся цифру. Тогда Олег вынужден ставить нечётную цифру и число не делится даже на 2.

3. В каждую клетку таблицы 2012×2012 вписан либо нуль, либо единица, причем в каждом столбце и каждой строке есть как нули, так и единицы. Докажите, что в этой таблице найдутся две строки и два столбца такие, что на концах одной из диагоналей образованного ими прямоугольника стоят нули, а другой — единицы. (И. Рубанов + жюри)

Решение. Рассмотрим строку C_1 , в которой больше всего единиц. В ней есть клетка X , в которой стоит нуль, а в столбце, где стоит клетка X — клетка Y , в которой стоит единица. Если в строке C_2 , где стоит клетка Y , под какой-то единицей строки C_1 стоит нуль, то все доказано: искомыми строками будут C_1 и C_2 , а столбцами — тот, где стоят клетки X и Y , и тот, где под единицей в C_1 стоит нуль в C_2 . Если же под каждой единицей строки C_1 в строке C_2 тоже стоит единица, то в строке C_2 больше единиц, чем в строке C_1 , что противоречит выбору строки C_1 .

4. Существуют ли два многоугольника (не обязательно выпуклых), обладающих следующим свойством: прикладывая их друг к другу (без наложения), можно получить многоугольники с любым числом сторон от 3 до 100 включительно? (С. Волчёнков, С. Берлов, И. Богданов)



Решение. Предъявим пример таких многоугольников. Пусть многоугольник $M = A_1A_2 \dots A_{51}$ таков, что $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{50}A_{51}$ и $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_2A_3A_4 = \dots = \angle A_{49}A_{50}A_{51} = 179^\circ$. Построим треугольник $A_1A_{51}B$, содержащий M и такой, что $\angle A_{50}A_{51}B = 1^\circ$, а $\angle BA_1A_2 > 1^\circ$. Мы утверждаем, что M и $N = BA_1A_2 \dots A_{51}$ — пара требуемых многоугольников.

M и N в объединении дают треугольник. Чтобы получить $(2k+1)$ -угольник (при $2 \leq k \leq 49$), повернём M так, чтобы отрезок A_kA_{k+1} перешёл в отрезок A_1A_2 ; обозначим полученный многоугольник через $M' = C_1 \dots C_{51}$. Тогда в объединении многоугольники M' и N дадут многоугольник $BC_kC_{k-1} \dots C_1A_{52-k}A_{53-k} \dots A_{51}$ с $2k+1$ вершиной. Чтобы получить $2k$ -угольник (при $2 \leq k \leq 50$), повернём M так, чтобы отрезок A_1A_2 перешёл в отрезок A_kA_{k+1} ; обозначим полученный многоугольник через $M'' = D_1 \dots D_{51}$. Тогда точка $D_{52-k} = A_{51}$ окажется на отрезке $D_{53-k}B$, поэтому в объединении многоугольники M'' и N дадут многоугольник $BA_1A_2 \dots A_kD_{51}D_{50} \dots D_{53-k}$ с $2k$ вершинами.

На рисунках показано, как получаются 3-, 7- и 6-угольники.