IV олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап
Решения заданий второго дня.

5. *Можно ли расставить на ребрах куба 12 натуральных чисел так, чтобы суммы чисел на любых двух противоположных гранях отличались ровно на единицу?* (Д. Храмцов)

Ответ. Нельзя. **Решение**. Допустим, так расставить числа удалось. Тогда сумма всех чисел на любых двух противоположных гранях нечетна. Сложив все три такие суммы, получим нечетный результат. Но в этом результате каждое ребро учтено ровно два раза, поскольку лежит в двух гранях куба, поэтому он должен быть четным. Противоречие.

6. *Существуют ли такие различные натуральные числа a, b и c, что число a+1/a равно полусумме чисел b+1/b и c+1/c?* (А. Голованов)

Ответ. Нет. **Решение**. Допустим, такие числа нашлись. Заметим, что если m и n — натуральные числа и $m < n$, то $m+1/m \le m+1 \le n < n+1/n$. Поэтому мы (поменяв, если нужно, местами числа b и c) можем считать, что $b < a < c$. Перепишем условие в виде $(a–b)+(1/a–1/b) = (c–a)+(1/c–1/a)$. Поскольку каждое из чисел $1/a–1/b$ и $1/c–1/a$ отрицательно и больше $–1$, а числа $a–b$ и $c–a$ — целые, имеем $a–b = c–a$ и $1/a–1/b = 1/c–1/a$. Поделив первое из этих двух уравнений на второе, получим $–ab = –ac$, откуда $b = c$ — противоречие.

7. *Углы треугольника ABC удовлетворяют условию 2∠A+∠B = ∠C. Внутри этого треугольника на биссектрисе угла A выбрана точка K такая, что BK = BC.* Докажите, что $\angle KBC = 2\angle KBA$. (С. Берлов)

Первое решение. Поскольку $\angle C > \angle A+\angle B$, то $\angle C > 90°$. Выберем на луче AC точку T таким образом, что $BC = BT$. Заметим, что $\angle ATB = \angle BCT = \angle A+\angle B$. Поскольку $2\angle A+\angle B = \angle C$, имеем $3\angle A+2\angle B = \angle A+\angle B+\angle C = 180°$, откуда $\angle CBT = \angle A \Rightarrow \angle ABT = \angle A+\angle B = \angle ATB$. Значит, точка K лежит на оси симметрии равнобедренного треугольника BAT, откуда $BK = KT$. Итак, $BT = BC = BK = KT$, то есть треугольник BKT — равносторонний, откуда $\angle KBC = 60°–\angle CBT = 60°–\angle A$, а $\angle ABK = 30°–\angle BAK = 30°–\angle A/2 = \angle KBC/2$. **Второе решение**. Выберем точку L на биссектрисе угла A внутри треугольника таким образом, чтобы выполнялось условие $\angle LBC = 2\angle LBA$. Чтобы доказать, что точки L и K совпадут, достаточно доказать, что $BL = BC$. Пусть биссектриса угла CBL пересекает AC в точке N. Тогда $\angle BNC = \angle A+2\angle B/3 = \angle A/3+\angle B/3+(\angle B/3+2\angle A/3) = (\angle A+\angle B+\angle C)/3 = 60°$. Заметим, что L — точка пересечения биссектрис треугольника ABN. Значит, $\angle LNB = 60°$, и треугольники BCN и BLN равны по стороне BN и двум прилежащим к ней углам, откуда и следует равенство $BL = BC$.

8. *Пусть n — натуральное число, большее 1. У Кости есть прибор, устроенный так, что если в него положить 2n+1 различных по весу монет, то он укажет, какая из монет — средняя по весу среди положенных. Барон Мюнхгаузен дал Косте 4n+1 различных по весу монет и про одну из них сказал, что она является средней по весу. Как Косте, использовав прибор не более n+2 раз, выяснить, прав ли барон?* (К. Кноп)

Решение. Пусть M — монета, которую барон считает средней по весу. Костя может действовать по следующему алгоритму:

0. Счетчик повторов установим равным 0. Положим в прибор монету M и еще какие-то $2n$ монет.

1. Пока значение счетчика не достигло n, делаем следующее: если прибор укажет на M как среднюю, то перейдем к шагу 2; если прибор укажет на другую монету, то выкинем ее из прибора, добавим в прибор любую из остальных (не выкинутых ранее) монет, увеличим счетчик повторов на 1 и вернемся к шагу 1; если счетчик повторов равен n, то барон не прав. Конец.

2. Оставим в приборе монету M и заменим все остальные $2n$ монет (на все прочие $2n$ монет). Если прибор снова покажет на M как на среднюю, то барон прав, иначе — не прав.

Обоснование вывода, сделанного на шаге 2. Если M — средняя по весу в двух последних тестированиях, то в каждом из них были n монет легче M и n монет тяжелее M. Значит, всего есть $2n$ монет легче M и $2n$ монет тяжелее. Следовательно, M — средняя по весу. Если же в предпоследнем тестировании M средняя, а в последнем нет, то M тяжелее, чем ровно $n+x$ монет, где x не равно n, — а, значит, точно не средняя по весу из всех монет.

Обоснование вывода, сделанного в конце шага 1. Пусть в i-ом тестировании было x_i монет легче монеты M. Без ограничения общности можно считать, что при первом тестировании M была тяжелее средней монеты, то есть $x_1 > n$. Далее, если добавленная после i-го тестирования монета легче M, то $x_{i+1} = x_i$, иначе $x_{i+1} = x_i–1$. Если счетчик повторов достиг n, это значит, что мы выкинули n монет, и при этом x_i никогда не становилось равным n. Но тогда все x_i больше n, и, в частности, $x_n > n$. Так как уже найдены x_n не выкинутых и n выкинутых монет, которые легче M, и $x_n+n > 2n$, то M — точно не средняя.