

IV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, критерии проверки

1. Назовем четырехзначное число x забавным, если каждую его цифру можно увеличить или уменьшить на 1 (при этом цифру 9 можно только уменьшать, а 0 — только увеличивать) так, чтобы в результате получилось число, делящееся на x .

а) Найдите два забавных числа. б) Найдите три забавных числа.

в) Существует ли четыре забавных числа? (С. Берлов)

Ответ. Существуют четыре забавных числа: 1111, 1091, 1109, 1089. **Замечание.** Покажем, что других забавных чисел нет. Заметим, что получившееся после изменения цифр число y не меньше, чем x , и не равно x , но его первая цифра может быть больше первой цифры числа x только на 1. Такое, как легко видеть, возможно только если число x начиналось на 1 и $y = 2x$. При этом число y должно начинаться на 2, то есть при умножении x на 2 «в столбик» переноса из разряда сотен в разряд тысяч не было.

Перебирая цифры от 0 до 9, находим, что если при умножении x на 2 «в столбик» в данный разряд нет переноса, то в нем могла стоять только 1 (которую затем увеличили на 1) или 9 (которую затем уменьшили на 1), а если перенос был, то только 0 (который затем увеличили на 1) или 8 (которую затем уменьшили на 1). Поэтому число x могло оканчиваться на 1 или 9, а в разряде десятков у него в первом случае могли быть 1 или 9, а во втором случае — 0 или 8. Содержимое разряда сотен в каждом из четырех получившихся случаев определяется однозначно, что и даёт четыре ответа.

Критерии. Все пункты оцениваются совместно. Если найдено только одно забавное число — 0 баллов. Найдены два забавных числа — 2 балла. Найдены 3 забавных числа — 4 балла. Найдены все 4 забавных числа — 7 баллов. Обоснования, что других забавных чисел нет, не требуется. За отсутствие обоснования, что найденные числа — действительно забавные, оценка не снижается. Если вместо забавных чисел выписаны их удвоения, а сами забавные числа не выписаны, оценка не снижается. Кроме забавных чисел в ответ включено постороннее число — снимается 1 балл.

2. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC такова, что угол ABD — прямой и $BC + CD = AD$. Найдите отношение оснований $AD : BC$. (Б. Обухов)

Ответ. $AD : BC = 2$. **Первое решение.** Отложим на стороне AD отрезок $AE = BC$. Тогда $ABCE$ — параллелограмм, а $ED = CD$. Поскольку $AB \parallel CE$, диагональ BD перпендикулярна AB , перпендикулярна и CE . Следовательно, она проходит через середину F основания CE равнобедренного треугольника CDE . Поскольку $EF = CF$, $\angle EFD = \angle BFC$ и $\angle BCF = \angle FED$, треугольники CFB и EFD равны. Поэтому $ED = BC = AE$, откуда и следует ответ. **Второе решение.** Выберем на стороне AD точку K так, что отрезок BK параллелен CD . Тогда $KD = BC$, и, значит, $AK = CD$. Кроме того, $BK = CD$ ($KBCD$ — параллелограмм), поэтому $AK = BK$ и, значит, высота KH треугольника AKB является медианой. Следовательно, KH — средняя линия прямоугольного треугольника ABD . Отсюда $AD = 2KD = 2BC$.

Критерии. Без доказательства (но с формулировкой!) используется факт, что точка на гипотенузе, равноудалённая от двух концов катета, является серединой гипотенузы — снимается 3 балла. Сделано дополнительное построение, с помощью которого можно получить решение (в частности, выбрана точка E или точка K , упомянутые в наших решениях, или основание BC продолжено за точку C на отрезок, равный CD или сторона DC продолжена за точку C на отрезок, равный BC), но дальнейшего содержательного продвижения нет — 1 балл.

3. На столе лежат 100 одинаковых с виду монет, из которых 85 фальшивых и 15 настоящих. В вашем распоряжении есть чудо-тестер, в который можно положить две монеты и получить один из трех результатов — «обе монеты настоящие», «обе монеты фальшивые» и «монеты разные». Можно ли за 64 таких теста найти все фальшивые монеты? (К. Кноп)

Ответ. Можно. **Решение.** Приведём один из возможных вариантов определения фальшивых монет. Разделим монеты на 50 пар и проверим все пары, кроме одной. Мы узнаем количество фальшивых в каждой паре. Поскольку общее число фальшивых монет известно, мы узнаем также, сколько фальшивых в оставшейся паре. Нам осталось выяснить, какая монета фаль-

шивая в каждой из пар, состоящих из разных монет. Для этого заметим, что есть пара, в которой обе монеты фальшивые, потому что фальшивых монет больше 50. Возьмем монету из такой пары и протестируем с ней по одной монете из каждой пары, где обе монеты разные. Таких пар не более 15, поскольку у нас только 15 настоящих монет. Поэтому всего мы использовали не более $49 + 15 = 64$ тестов.

Критерии. 1. Только ответ «можно» — 0 баллов. 2. В решении есть две ключевых идеи. Первая: разбиваем 100 на 50 пар, делаем 49 попарных взвешиваний и показываем, что этого достаточно, чтобы поместить каждую пару (включая невзвешенную 50-ю) в один из трех классов — "2Ф", "2Н", "ФН". Второй: показываем, как можно найти все настоящие монеты максимум за 15 операций, если монеты уже разбиты на 50 пар, про каждую из которых известно, сколько в ней настоящих монет. Если в решении есть ровно одна из этих двух идей, оно оценивается в 1 балл (даже если вместо ответа 64 дан ответ 65). 3. То, что среди 50 пар монет обязательно найдется пара из двух фальшивых, а также то, что «худший случай» при нахождении настоящих монет — это тот, когда все они в разных парах, считаем очевидным, за отсутствие обоснований этих утверждений оценки не снижаем. Исключение — ситуация, когда при рассмотрении «худшего случая» используется специфика числа 15, и проведенные рассуждения не переносятся без изменений на случай 14 и 13 пар: в таком случае *снимается 1 балл*. Если в решении используются взвешивания монет из пар ФН, расположенных по циклу, и решение не проходит для случая одной пары ФН — не более 4 баллов.

4. Собственным делителем числа называется любой его натуральный делитель, кроме 1 и самого числа. С составным натуральным числом a разрешается проделывать следующие операции: разделить на наименьший собственный делитель или прибавить любое натуральное число, делящееся на его наибольший собственный делитель. Если число получилось простым, то с ним ничего нельзя делать. Верно ли, что с помощью таких операций из любого составного числа можно получить число 2011? (С. Берлов)

Ответ. Неверно. **Решение.** Покажем, что наибольший простой делитель числа при указанных операциях не уменьшается, и потому мы никогда не получим число 2011 из составного числа, имеющего простой делитель, больший, чем 2011.

Заметим, что наибольший собственный делитель b составного числа a делится на наибольший простой делитель p этого числа. В самом деле, очевидно, $b = a/q$, где q — наименьший простой (и наименьший собственный) делитель числа a , и, поскольку $b > 1$, множитель p должен остаться в разложении частного a/q на простые сомножители (если $p = q$, это всё равно верно, поскольку тогда $a = p^n$, где $n > 1$). Поэтому если мы делим составное число на его наименьший собственный делитель q , то получаем частное b с тем же наибольшим простым делителем p . Если же мы к числу $a = bq$ прибавляем кратное bc наибольшего собственного делителя b , то получаем число $b(q+c)$, у которого наибольший простой делитель не меньше, чем наибольший простой делитель числа b , то есть не меньше p .

Критерии. Только ответ «неверно» — 0 баллов. Только утверждение: "Если в числе есть простой делитель, больший 2011, то ничего не получится" без обоснования — 1 балл. Утверждение: «Если в числе есть простой делитель, больший 2011, то ничего не получится, потому что наибольший простой делитель не уменьшается» без дальнейшего обоснования — 3 балла. То же, плюс пояснение типа: «действительно, при делении наибольший простой делитель, очевидно, сохраняется, а при прибавлении — не уменьшается» без дальнейшего обоснования — 4 балла. Если в работе не учтено, что при прибавлении наибольшего собственного делителя наибольший простой делитель может измениться — не более 3 баллов.

5. Существуют ли 10 различных рациональных чисел таких, что произведение любых двух из них — целое число, а произведение любых трех — нет? Напомним, что рациональным называется число, равное отношению двух целых чисел. (О. Подлипский)

Ответ. Нет. **Решение.** Предположим, что нашлись такие 10 чисел. Рассмотрим любые три из них: a, b, c . Тогда числа ab, bc, ca — целые, а число $abc = p/q$ — нет. Тогда и число $(abc)^2 = p^2/q^2$ нецелое. Но $(abc)^2 = (ab)(bc)(ca)$ — целое. Противоречие. **Замечание.** Фактически доказано, что если все попарные произведения — целые, то и все произведения по три — целые.

Критерии. Ответ «не существуют» без обоснования — 0 баллов. Тот факт, что если рациональное число не является целым, то не является целым и его квадрат, считать известным.

За использование представлений рациональных чисел в виде несократимых дробей «по умолчанию» оценка не снижается. Сказано (при доказательстве от противного), что [для несократимых представлений] числитель каждой дроби должен делиться на знаменатели всех остальных, без дальнейшего содержательного продвижения — *1 балл*. При доказательстве от противного неверно обосновывается, что числитель каждой дроби делится на знаменатели всех остальных, а затем из этого факта верно выводится противоречие — *снимаются 2 балла*.

6. По кругу выложены черные и белые шары, причем черных в два раза больше, чем белых. Известно, что среди пар соседних шаров одноцветных пар втрое больше, чем разноцветных. Какое наименьшее число шаров могло быть выложено? (Б. Трушин)

Ответ. 24. Решение. Так как чёрных шаров в два раза больше, чем белых, то общее количество шаров делится на три. Обозначим его через n . Все шары разбиваются на чередующиеся группы подряд идущих одноцветных шаров (группа может состоять и из одного шара). Так как цвета групп чередуются, то общее количество групп четно. Пусть количество групп каждого цвета равно k . Тогда разноцветных пар соседних шаров будет $2k$, а одноцветных $n - 2k$. Из условия задачи получаем, что $n - 2k = 3 \cdot 2k$. Отсюда $n = 8k$. Таким образом общее количество шаров делится и на три и на восемь. Значит, n делится на 24, и потому $n \geq 24$. Примером может служить любой круг из 8 белых и 16 чёрных шаров, в котором по три чёрных и белых групп. Например, Белый – чёрный – белый – чёрный – шесть белых – четырнадцать черных.

Критерии. Только ответ — *0 баллов*. Ответ с примером на 24 шара без доказательства, что меньше 24 шаров быть не может — *2 балла*. Доказательство, что меньше 24 шаров быть не может, без примера на 24 шара — *4 балла*. За использование без верного обоснования того факта, что количество разноцветных пар четно, оценка *снижается на 1 балл*. Доказано, что число шаров делится на 12, без дальнейшего содержательного продвижения — *1 балл*.

7. 1000 различных положительных чисел записаны в ряд в порядке возрастания. Вася разбил эти числа на 500 пар соседних и нашел суммы чисел во всех парах. Петя разбил эти же числа на 500 пар таким образом, что между числами в каждой паре стоит ровно три других числа, и тоже нашел суммы чисел во всех парах. Докажите, что произведение сумм, найденных Петей, больше, чем произведение сумм, найденных Васей. (С. Берлов)

Решение. Лемма. Пусть $a < d$, а $b < c$. Тогда $(a+b)(c+d) < (a+c)(b+d)$. **Доказательство.** $(a+c)(b+d) - (a+b)(c+d) = ab+cd-ac-bd = (a-d)(b-c) > 0$. **Решение задачи.** Разобьем всю тысячу чисел на 125 восьмёрок из идущих подряд чисел. Возьмем первую восьмерку: $a_1 < \dots < a_8$. У Васи она даст суммы a_1+a_2 , a_3+a_4 , a_5+a_6 , a_7+a_8 , у Пети — суммы a_1+a_5 , a_2+a_6 , a_3+a_7 , a_4+a_8 . По лемме $(a_1+a_2)(a_5+a_6) < (a_1+a_5)(a_2+a_6)$ и $(a_3+a_4)(a_7+a_8) < (a_3+a_7)(a_4+a_8)$. Осталось проделать то же самое для остальных 124 восьмёрок и перемножить полученные неравенства. **Замечание.** Тот использованный при доказательстве леммы факт, что если $a < d$ и $b < c$, то $ab+cd > ac+bd$, достаточно широко известен под названием *транснаравенство*.

Критерии. Конкретные числовые примеры — *0 баллов*. Если утверждение леммы используется без всякого обоснования, решение оценивается *не выше, чем в 4 балла*. Ссылку на транснаравенство (из транснаравенства следует, что...) считать достаточным обоснованием леммы, за отсутствие подробностей оценку не снижать. Все числа разбиты на восьмерки последовательных, записаны нужные неравенства, дальнейшего содержательного продвижения нет — *1 балл*.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы ABC и ADC прямые. На сторонах AB , BC , CD , DA взяты точки K , L , M , N соответственно так, что $KLMN$ — прямоугольник. Докажите, что середина диагонали AC равноудалена от прямых KL и MN . (Д. Швецов)

Решение. Рассмотрим треугольник KNT , у которого $KT \parallel BC$ и $NT \parallel CD$. Он равен треугольнику LMS по стороне $KN = LM$ и двум прилежащим углам. Следовательно, $KT = LS$, и $KTCL$ — параллелограмм, откуда $TC \parallel KL$ и $TC \perp KN$.

Пусть S и O — середины отрезков AT и AC соответственно, а n — серединный перпендикуляр отрезка KN . Так как $\angle ANT = \angle ADC = 90^\circ$ и $\angle AKT = \angle ABC = 90^\circ$, $NS = KS = AT/2$, то есть точка S равноудалена от K и N . Допустим, прямая AC совпадает с прямой TC . Тогда AC перпендикулярна KN и проходит через точку S . Значит, $AC = n$. Допустим, прямые AC и TC раз-

личны. Тогда SO — средняя линия треугольника ATC , и потому перпендикулярна KN . Значит, $SO \perp n$. В обоих случаях точка O оказывается на серединном перпендикуляре n , все точки которого равноудалены от прямых KL и MN .

Критерии. Специальных априорных критериев нет.