Первый тур дистанционного этапа IV олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Можно ли в половину клеток доски 12x12 поместить по фишке так, чтобы в одном квадрате 2x2, составленном из клеток доски, было нечётное количество фишек, а в остальных — чётное?*

Ответ: Можно. Первое решение. Поставим по фишке в каждую клетку второй, четвертой, …, двенадцатой строк. Тогда в каждом квадрате 2x2 будет по две фишки. Теперь сдвинем фишку из левого верхнего угла на одну клетку вниз. В угловом квадрате осталось две фишки, в квадрате под ним их стало три, а во всех остальных квадратах 2x2 не поменялось вообще ничего. Второе решение. Поставим 72 фишки в прямоугольник 8x9, один из углов которого совпадает с углом квадрата. Тогда нечётное число фишек будет в единственном квадратике — том, центр которого совпадает с углом прямоугольника из фишек, противоположным углу квадрата.

2. *В треугольнике ABC угол C втрое больше угла A, а сторона AB вдвое больше стороны BC. Докажите, что угол ABC равен 60 градусам.*

Решение. Пусть D — середина стороны AB. Так как $BD = BC$, то треугольник BCD равнобедренный. Обозначим $\angle CAD = x$, $\angle ACD = y$. Тогда $\angle DCB = 3x–y$, а $\angle CDB = x+y$. Поскольку $\angle DCB = \angle CDB$, то $3x–y = x+y$, откуда $y = x$. Но тогда $DC = DA = DB = BC$, откуда треугольник BCD — равносторонний, и, следовательно, угол B равен 60 градусам.

3. *Даны 5 различных натуральных чисел. Произведение двух наименьших из них больше 25, а произведение двух наибольших — меньше 75. Найдите все эти числа (укажите все возможные варианты и докажите, что других вариантов нет).*

Решение. Обозначим эти числа в порядке возрастания a, b, c, d, e. Если b не больше 5, то a не больше 4, тогда ab не больше 20. Следовательно, b не меньше 6. Аналогично, если d не меньше 9, то e не меньше 10, и de не меньше 90. Следовательно, d не больше 8. Но такое возможно только при $b = 6$, $c = 7$, $d = 8$. Теперь из условия $25/6 < a < 6$ получаем $a = 5$, а из условия $8 < e < 75/8$ находим $e = 9$.

4. *У Али-Бабы есть 40 мешков с монетами. Джинн может по просьбе Али-Бабы определить количество монет в каждом из двух указанных ему мешков, но при этом возьмёт за работу одну монету из одного из этих мешков (и Али-Баба не увидит, из какого именно). Сможет ли Али-Баба действовать так, чтобы после не более чем 100 таких процедур точно сказать, сколько монет в данный момент лежит в каждом из мешков, кроме тех двух, которые джинн пересчитывал последними? В каждом мешке — не меньше 1000 монет.*

Ответ: Сможет. Решение. Пронумеруем мешки: 1, 2, …, 40. Определим последовательно количества монет в следующих мешках: (1, 2), (2, 3), (3, 4),...(39, 40). После второй операции мы будем точно знать число монет в мешке 1 (т.к. поймём, изменилось ли после первой операции число монет в мешке 2), после третьей — число монет в мешке 2 и т.д. Тем самым, после 39-й операции мы будем точно знать число монет во каждом из первых 38 мешков.

5. *Даны девять натуральных чисел, причём запись первого состоит только из единиц, второго — только из двоек, ..., девятого — только из девяток. Может ли произведение каких-то двух из этих чисел делиться на произведение остальных?*

Ответ: Нет. Решение. Предположим противное. Назовем два искомых числа *выбранными*. Одно из двух выбранных должно записываться пятерками, потому что никакое другое на 5 не делится. Другое должно быть четным. Но тогда наибольшая степень двойки, на которую делится произведение выбранных чисел, равна 3, а наименьшая степень двойки, на которую необходимо разделить, равна 4 (среди невыбранных чисел обязательно есть три четных, одно из которых делится на 4). Противоречие.