

Второй тур дистанционного этапа IV олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. На уроке физкультуры все ученики 8а класса построились в шеренгу. Оказалось, что мальчики и девочки в ней чередуются. Известно, что ровно 52% учеников 8а класса — мальчики. Найдите количество девочек в 8а классе. Не забудьте обосновать ответ.

Ответ: 12. Решение. Если бы в шеренге было четное число учеников, мальчиков и девочек в ней было бы поровну. Но по условию мальчиков в классе больше. Значит, в шеренге нечетное число учеников, причем мальчики стоят на нечетных местах. Пусть в классе n девочек. Тогда мальчиков там $n+1$, и из условия получаем, что $n+1 = 0,52(2n+1)$, откуда $n = 12$.

2. На острове 1000 деревень, в каждой из которых 99 жителей. Каждый житель острова — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. При этом известно, что на острове ровно 54054 рыцаря. В один прекрасный день каждому жителю острова был задан вопрос: «Кого в Вашей деревне больше: рыцарей или лжецов?» Оказалось, что в каждой деревне на этот вопрос 66 человек ответило, что в деревне больше рыцарей, и 33 — что больше лжецов. Сколько на острове деревень, в которых рыцарей больше, чем лжецов?

Ответ: 638. Решение. Поровну рыцарей и лжецов ни в одной деревне быть не может, потому что тогда все ее жители солгали бы. Если в деревне больше рыцарей, то, очевидно, правду сказали 66 человек и 33 человека солгали, а если больше лжецов — то наоборот. Пусть на острове n деревень, где больше рыцарей. Тогда из условия следует, что $66n+33(1000-n) = 54054$. Решая это уравнение, получаем ответ.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL , и на ее продолжении за точку L выбрана точка K , для которой $LK = AB$. Оказалось, что $AK \parallel BC$. Докажите, что $AB > BC$.

Решение. Пусть угол ABC равен 2α . Тогда каждый из углов ABL , CBL и AKB равен α (последний — как внутренний накрест лежащий с CBL при пересечении параллельных прямых AK и BC с BK). Следовательно, треугольник BAK — равнобедренный, откуда $AK = AB$. Так как по условию $LK = AB$, треугольник AKL — равнобедренный, откуда получаем, что углы KAL , KLA и BLC равны $90^\circ - \alpha/2$. Осталось заметить, что угол BAC равен (из треугольника BAK) $180^\circ - 2\alpha - (90^\circ - \alpha/2)$, а угол BCA равен (из треугольника BCL) $180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha/2)$. Таким образом, угол BCA больше угла BAC , откуда $AB > BC$.

4. Квадрат 15×15 разбит на квадратики 1×1 . Из этих квадратиков выбрали несколько, и в каждом из выбранных провели одну или две диагонали. Оказалось, что никакие две проведенные диагонали не имеют общего конца. Какое наибольшее число диагоналей может быть проведено? (В решении приведите ответ, способ проведения диагоналей и доказательство того, что это число диагоналей действительно наибольшее возможное.)

Ответ: 128. Решение. Занумеруем по порядку строки и столбцы квадрата числами от 1 до 15 и проведем по две диагонали в клетках, стоящих на пересечении нечетных строк с нечетными столбцами. Таких клеток 64, то есть диагоналей будет проведено 128. С другой стороны, у диагоналей не должно быть общих концов, а вершин клеток в квадрате 15×15 у нас всего $16 \times 16 = 256$. Поэтому диагоналей можно провести не больше, чем $256:2 = 128$.

5. В строку выписаны 2011 последовательных пятизначных чисел. Оказалось, что сумма цифр 21-го числа равна 37, а сумма цифр 54-го равна 7. Найдите сумму цифр 2011-го числа. (Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других ответов нет).

Ответ: 29. Решение. При переходе от 21-го числа к 54-му сумма цифр уменьшается на 30. Легко проверить, что такое возможно, только если по дороге происходит переход через число, кратное 10000. Но это значит, что в разрядах тысяч и сотен у 21-го числа стоят девятки, а в разряде десятков — не меньше шестерки. Поэтому у 11-го из выписанных чисел цифра десятков на единицу меньше, чем у 21-го, а остальные цифры — такие же, и сумма цифр 11-го числа равна 36. 2011-е число ровно на 2000 больше 11-го, причем между ними есть число, кратное 10000. Поэтому 11-е и 2011-е число совпадают в последних трех разрядах, а сумма цифр в разрядах тысяч и десятков тысяч у 2011-го числа на 7 меньше (при переходе через число, кратное 10000, она упала на 8, а при переходе через следующее число, кратное 1000, выросла на 1), откуда и получаем ответ.