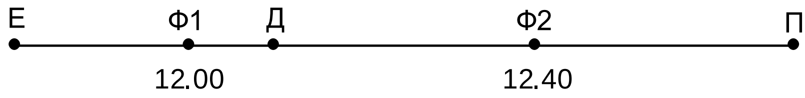
Третий тур дистанционного этапа IV олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *У дороги из Ёлкино в Палкино растёт дуб, от которого до Ёлкино вдвое ближе, чем до Палкино. Федя, едущий с постоянной (и большей 0) скоростью из Ёлкино в Палкино, в 12.00 был вдвое ближе к дубу, чем к Ёлкино. В 12.40 снова оказалось, что Федя вдвое ближе к дубу, чем к Ёлкино. Когда Федя приедет в Палкино?*

<u>Ответ</u>. В 13.10. <u>Решение</u>**.** На дороге из Ёлкино в Палкино есть две точки, которые вдвое ближе к дубу, чем к Ёлкино. Одна из них ($Ф_1$) находится между Ёлкино и дубом, другая ($Ф_2$) — между дубом и Палкино (см. рис.). Для удобства подсчетов примем весь путь от Ёлкино до Палкино за 9.



Тогда ЕД = 3, $Ф_1Д = 1$, $ЕФ_2 = 2ЕД = ЕД+ДФ_2$, откуда $ДФ_2 = ЕД = 3$ и $Ф_2П = ЕП–ЕФ_2 = 3$. Путь $Ф_1Ф_2 = Ф_1Д+ДФ_2$ длины 4 Федя проехал за 40 минут, поэтому путь $Ф_2П$ длины 3 он проехал за 30 минут, откуда и получаем ответ.

2. *Каждый из трёх мальчиков либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Им сообщили шесть натуральных чисел. После этого каждый из мальчиков сделал по два утверждения.*

Петя: 1) Это шесть последовательных натуральных чисел.

2) Сумма этих шести чисел чётна.

Вася: 1) Это числа 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2) Коля — лжец.

Коля: 1) Все эти числа различны и делятся на 3.

2) Каждое из этих чисел меньше 20.

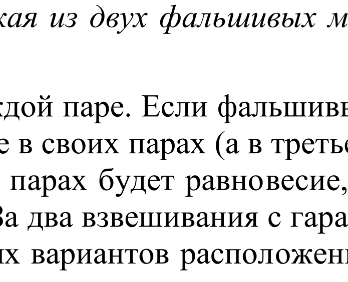
Какие числа сообщили мальчикам?

<u>Ответ</u>: 3, 6, 9, 12, 15, 18. <u>Решение</u>. Среди шести последовательных натуральных чисел ровно три нечётных. Поэтому их сумма нечётна. Значит, Петя солгал либо в первый раз, либо во второй, и потому он лжец, то есть солгал оба раза. Но тогда лжец и Вася, потому что в первом своём высказывании он назвал шесть последовательных натуральных чисел. Так как Вася сказал, что Коля — лжец, на самом деле Коля говорит правду. Есть только 6 натуральных чисел, делящихся на 3 и меньших 20, что и даёт нам ответ.

3. *Есть шесть внешне одинаковых монет. Четыре из них настоящие, две — фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, каждая из фальшивых весит меньше настоящей, и веса фальшивых монет различны. Есть весы с двумя чашками: если на них положить монеты, перевесит чашка, монеты на которой весят больше (но насколько больше, мы не узнаем). Как за три взвешивания найти обе фальшивые монеты? (Определять, какая из двух фальшивых монет легче, не требуется.)*

<u>Решение</u>. Разделим монеты на три пары и сравним две монеты в каждой паре. Если фальшивые монеты попали в две разные пары, то мы найдём их, как более лёгкие в своих парах (а в третьей паре будет равновесие). Если же они попали в одну пару, то в двух парах будет равновесие, и мы поймём, что обе фальшивые монеты в третьей паре. <u>Замечание</u>. За два взвешивания с гарантией найти обе фальшивые нельзя. В самом деле, есть 15 возможных вариантов расположения двух фальшивых монет среди шести данных, а каждое взвешивание, если нам не везёт, уменьшает совокупность подходящих вариантов не более, чем в три раза.

4. *Внутри острого угла BAC взяли такую точку D, что угол CAD вдвое больше угла BAD. Могла ли точка D оказаться вдвое дальше от прямой AC, чем от прямой AB?*



<u>Ответ</u>. Не могло. <u>Решение</u>**.** Опустим из точки D перпендикуляр DE на прямую AB, а на луче AC отложим отрезок $AF = AD$. В

равнобедренном треугольнике ADF проведём медиану AG. Поскольку она является также биссектрисой и высотой, углы DAE и DAG равны, и прямоугольные треугольники AED и AGD равны по гипотенузе и острому углу. Поэтому $DG = GF = ED$, откуда $DF = 2DE$. Но отрезок DF не перпендикулярен AC, и потому длиннее перпендикуляра DH, опущенного из точки D на прямую AC. Поэтому $DH < 2DE \Rightarrow DH \neq 2DE$.

5. *Числитель каждой из 48 дробей равен одному из чисел 2, 3, …, 49, знаменатель — тоже, причём каждое из этих 48 чисел встречается как среди числителей, так и среди знаменателей. Докажите, что либо одна из этих дробей равна целому числу, либо из них можно выбрать не более 25 дробей, произведение которых — целое число.*

Решение. Рассмотрим дробь $a_1/2$ со знаменателем 2. Если a_1 четно, то мы уже получили целое число. В противном случае умножим $a_1/2$ на дробь a_2/a_1, результат — на дробь a_3/a_2 и так до тех пор, пока очередной числитель a_n не станет чётным (такое когда-то случится, потому что числители не могут повторяться). После этого в произведении получится целое число $a_n/2$. Поскольку различных нечётных знаменателей у нас 24, мы перемножили не больше 25 дробей.