Четвертый тур дистанционного этапа IV олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач, указания по проверке и оценке

1. *Можно ли из пяти одинаковых прямоугольников с периметром 10 составить один прямоугольник с периметром 22?*

Ответ. Можно. Решение**.** Можно выложить вертикально в ряд 5 прямоугольников размерами 1,5х3,5. Другой пример: поставить вертикально 3 прямоугольника 3х2, а под ними расположить горизонтально два таких же прямоугольника. Вероятно, есть и другие примеры.

2. *В треугольнике ABC AC = 1, AB = 2, O — точка пересечения биссектрис. Отрезок, проходящий через точку O параллельно стороне BC, пересекает стороны AC и AB в точках K и M соответственно. Найдите периметр треугольника AKM.*

Ответ: 3. Решение. Заметим, что $\angle KCO = \angle BCO = \angle KOC$ (накрест лежащие углы). Поэтому $OK = KC$. Аналогично $BM = OM$. Поэтому $AK+AM+KM = AK+KC+AM+BM = 3$.

3. *Фирма «Рога и копыта» разделилась на фирму «Рога» и фирму «Копыта» с разным числом сотрудников. Директор фирмы «Рога» получает такую же зарплату, как директор фирмы «Копыта», и средняя зарплата всех остальных сотрудников фирмы «Рога» совпадает со средней зарплатой всех остальных сотрудников фирмы «Копыта». Кроме того, средняя зарплата всех сотрудников фирмы «Рога» совпадает со средней зарплатой всех сотрудников фирмы «Копыта». Что больше: зарплата директора фирмы или средняя зарплата всех остальных сотрудников?*

Ответ: Зарплата директора фирмы равна средней зарплате всех остальных сотрудников.

Решение. Пусть в фирме «Рога» m сотрудников, в фирме «Копыта» — n сотрудников, зарплаты директоров составляют по x рублей, а средние зарплаты остальных сотрудников составляют по y рублей. Тогда суммарная зарплата всех сотрудников фирмы «Рога» составляет $y(m–1)+x$ рублей, а суммарная зарплата всех сотрудников фирмы «Копыта» составляет $x(n–1)+y$ рублей. Приравнивая средние зарплаты всех сотрудников, получаем $\frac{y(m-1)+x}{m}=\frac{y(n-1)+x}{n}$ (*). После преобразований приходим к равенству $n(x–y) = m(x–y)$ (**). По условию $n \neq m$, значит $x=y$.

4. *Делитель натурального числа называется собственным, если он больше 1 и меньше самого этого числа. Натуральное число называется элегантным, если оно имеет не менее двух собственных делителей и делится на разность любых двух из них. Найдите все элегантные числа.*

Ответ. 6, 8, 12. Решение**.** Легко проверить, что числа 6, 8 и 12 — элегантные. Пусть N — произвольное элегантное число. У нечётного числа все делители нечётные, разности делителей чётные, а нечётное число делиться на чётное не может. Поэтому, $N = 2n$. Но тогда $2n$ должно делиться на $n–2$, а значит и $4 = 2n–2(n–2)$ должно делиться на $n–2$. Значит, $n–2$ равно 4, 2, 1 или –1. Случай $n = 1$ отпадает, поскольку число 2 не имеет собственных делителей, остальные три случая дают три указанных в ответе элегантных числа.

5. *На клетчатой бумаге нарисована лента 1х2011, в первой клетке написано число 1, а в последней — число 2. Петя и Вася поочередно записывают в любую из свободных клеток числа 1 и 2. Петя ходит первым и пишет только единицы, а Вася — только двойки. Когда свободные клетки заканчиваются, Петя подсчитывает количество пар соседних клеток, в которых записаны одинаковые числа, а Вася — в которых разные. Если Петино число больше, то он выигрывает, в противном случае выигрывает Вася. Кто победит при правильной игре?*

Ответ. Вася. Решение. Разобьем клетки полоски от второй до 2011-й на пары стоящих рядом («доминошки»). Кроме того, отметим клетку 2010. Стратегия Васи: 1) пока отмеченная клетка пуста, после каждого хода Пети в клетку какой-либо доминошки ходить в другую клетку той же доминошки; 2) если Петя сделал ход в отмеченную клетку, а игра еще не завершена, сделать ход в любую клетку любой пустой доминошки и отметить вторую клетку этой доминошки. Легко проверить, что при такой игре Васи после каждого его хода отмеченная клетка пуста, вторая клетка той же доминошки заполнена, а во всех остальных доминошках либо обе клетки пусты, либо обе клетки заполнены. Кроме того, по четности последний ход — за Петей, значит, Петя не сможет вынудить Васю сделать ход в отмеченную клетку. Поэтому Вася всегда сможет сделать нужный ход.

Играя таким образом, Вася добьется, чтобы по окончании игры в каждой доминошке стояли две разные цифры, и победит, поскольку доминошек — 1005, а всего пар соседних клеток на ленте — 2010.