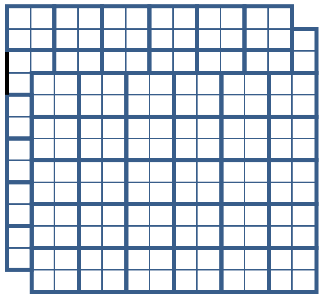
V олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий первого дня.

1. *200 человек стоят по кругу. Каждый из них либо лжец, либо конформист. Лжец всегда лжет. Конформист, рядом с которым стоят два конформиста, всегда говорит правду. Конформист, рядом с которым стоит хотя бы один лжец, может как говорить правду, так и лгать. 100 из стоящих сказали: «Я — лжец», 100 других сказали: «Я — конформист». Найдите наибольшее возможное число конформистов среди этих 200 человек.* (Р. Женодаров, С. Берлов)

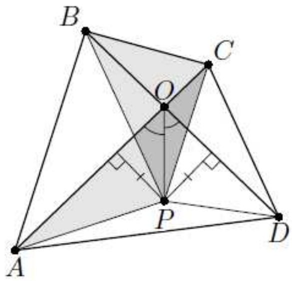
Ответ. 150. **Решение**. *Оценка*. Лжец не может сказать: «Я — лжец». Поэтому 100 человек, сказавшие: «Я — лжец», — конформисты. Все они солгали, поэтому рядом с каждым из них стоит лжец. Так как рядом со лжецом могут стоять максимум два конформиста, лжецов не меньше 50. Значит, конформистов не больше 150. *Пример*. Ставим по кругу 50 лжецов. В каждый из 50 промежутков между лжецами ставим трех конформистов. Средний из этих трех говорит правду, двое крайних лгут, что они лжецы, а все лжецы лгут, что они конформисты.

2. *Из шахматной доски размером 13×13 вырезали две противоположные угловые клетки. На оставшейся части доски отметили несколько клеток. Докажите, что на отмеченные клетки можно поставить шахматных королей так, чтобы всего королей было не больше 47, и они били все пустые отмеченные клетки. Напомним, что шахматный король бьет все клетки, соседние с ним по вертикали, горизонтали и диагонали.* (С. Берлов)



Решение. На рисунке справа доска 13×13 разделена на 47 участков так, что король, стоящий на одной из клеток участка, бьёт все остальные его клетки. Поэтому достаточно взять все участки, где есть отмеченные клетки, и в каждом поставим короля на одну из них.

3. *Диагонали выпуклого четырёхугольника ABCD равны и пересекаются в точке O. Точка P внутри треугольника AOD такова, что CD || BP и AB || CP. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD.* (С. Берлов)



Решение. Поскольку *AB* || *CP*, площади треугольников *APC* и *BPC* равны. Поскольку *CD* || *BP*, площади треугольников *BPC* и *BPD* равны. Следовательно, площади треугольников *APC* и *BPD* равны. Так как *AC* = *BD*, равны и высоты этих треугольников, опущенные на стороны *AC* и *BD* соответственно. Но это означает, что точка *P*, лежащая внутри угла *AOD*, равноудалена от его сторон, и потому лежит на его биссектрисе, что и требовалось доказать.

4. *Каждое из чисел x, y и z не меньше 0 и не больше 1. Докажите неравенство* $\frac{x^2}{1+x+xyz}+\frac{y^2}{1+y+xyz}+\frac{z^2}{1+z+xyz}\le 1$. (А. Храбров)

Решение. Заметим, что $1+yz \ge y+z$, поскольку $(1-y)(1-z) \ge 0$. Следовательно, $1+x+xyz = 1+x(1+yz) \ge 1+x(y+z) \ge x^2+xy+xz$. Поэтому $\frac{x^2}{1+x+xyz} \le \frac{x^2}{x^2+xy+xz} = \frac{x}{x+y+z}$. Применяя такую оценку к каждой из трёх дробей, получаем требуемое.