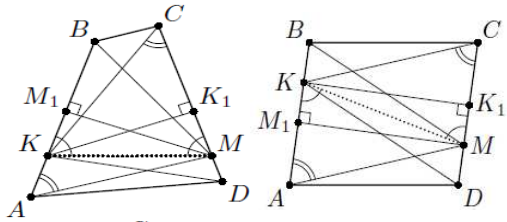
V олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

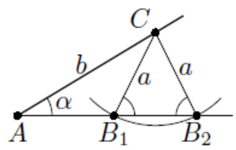
5. *В гандболе за победу дают 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.14 гандбольных команд провели турнир, где каждая команда с каждой сыграла по одному разу. Оказалось, что никакие две команды не набрали поровну очков. Могло ли случиться, что каждая из команд, занявших первые три места, проиграла каждой из команд, занявших последние три места?* (С. Берлов)

Ответ. Не могло. **Решение**. Пусть могло. Покажем, что *лучшая из трех последних команд набрала не меньше 9 очков*. В самом деле, три последних команды в играх между собой разыграли 6 очков, да ещё 18 очков отобрали у трех первых. Поэтому вместе они набрали не меньше 24 очков, и если каждая из них набрала не больше 8 очков, то все три набрали ровно по 8 очков, что противоречит условию задачи. Аналогичным рассмотрением очков, *потерянных* первыми тремя командами, доказывается, что *худшая из трех первых команд потеряла не меньше 9 очков, то есть набрала не больше 26–9 = 17 очков*. Получается, что каждая из восьми команд, занявших места с 11-го по 4-ое, набрала не меньше 10 и не больше 16 очков. Но в этом промежутке только 7 целых чисел, и выходит, что какие-то две команды набрали поровну очков. Противоречие.

6. *В выпуклом четырёхугольнике ABCD, в котором AB = CD, на сторонах AB и CD выбраны точки K и M соответственно. Оказалось, что AM = KC, BM = KD. Докажите, что угол между прямыми AB и KM равен углу между прямыми KM и CD.* (С. Берлов)



Первое решение. Треугольники ABM и CDK равны по трём сторонам, значит, равны и их высоты KK_1 и MM_1. Если они равны KM, то они совпадают с KM, и утверждение задачи очевидно. Если же эти высоты меньше KM, то прямоугольные треугольники KK_1M и MM_1K равны по гипотенузе и катету; значит, равны их углы K_1MK и M_1KM, что и требовалось доказать. На рисунках справа показаны два возможных случая взаимного расположения треугольников KK_1M и MM_1K.



Второе решение. Лемма. По двум сторонам a и b и углу α напротив стороны a можно построить не более двух различных треугольников. Если существуют два неравных треугольника с такими данными, то сумма их углов, лежащих напротив сторон, равных b, равна 180°. Доказательство. Возьмем угол XAY, равный α, и отложим на стороне AX отрезок $AC = b$. Третьи вершины искомых треугольников находятся на пересечении луча AY и окружности радиуса a с центром C. Таких точек не больше двух. Если их ровно две — B_1 и B_2 — то треугольник CB_1B_2 — равнобедренный. Пусть $AB_2 > AB_1$. Тогда $\angle CB_1A + \angle CB_2A = \angle CB_1A + \angle CB_1B_2 = 180°$. Решение задачи. Треугольники ABM и CDK равны по трем сторонам. Поэтому $\angle KAM = \angle BAM = \angle DCK = \angle MCK$. Таким образом, треугольники AKM и CMK имеют пару равных сторон $AM = CK$, общую сторону KM и пару равных углов напротив общей стороны. Если треугольники AKM и CMK равны, то $\angle AKM = \angle CMK$, и все доказано. Если же они не равны, то по лемме $\angle AKM = 180° - \angle CMK = \angle DMK$, и тоже все доказано.

7. *На доске в строчку написано n подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Под каждым из этих чисел написан его делитель, меньший этого числа и больший 1. Оказалось, что эти делители тоже образуют строчку подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Докажите, что каждое из исходных чисел больше, чем* $\dfrac{n^k}{p_1 p_2 \cdots p_k}$, *где* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *— все простые числа, меньшие* n. (С. Берлов)

Решение. Заметим, что все разности между числами и записанными под ними их делителями равны одному и тому же числу c. Пусть p — простое число, меньшее n, а p^s — наибольшая его степень, не превосходящая n. Тогда среди чисел во второй строке найдется делящееся на p^s. Но тогда на p^s делится и записанное над ним число в первой строке, а, значит, и число c. Таким образом, число c делится на наибольшую не превосходящую n степень любого простого числа p, меньшего n, а, значит, и на произведение этих степеней по всем таким p. Осталось заметить, что $p^s > n/p$ и любое число в исходной строке больше c.

8. *99 мудрецов сели за круглый стол. Им известно, что пятидесяти из них надели колпаки одного из двух цветов, а сорока девяти остальным — другого (но заранее неизвестно, какого именно из двух цветов 50 колпаков, а какого — 49). Каждый из мудрецов видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все мудрецы должны одновременно написать (каждый на своей бумажке) цвет своего колпака. Смогут ли мудрецы заранее договориться отвечать так, чтобы не менее 74 из них дали верные ответы?* (U. Feige, предложил К. Кноп)

Решение. Пусть среди колпаков 50 белых и 49 черных. Понятно, что те 49 мудрецов, которые видят по 50 белых и 48 черных колпаков, знают, что на них черные колпаки. Пусть теперь каждый из тех, кто видит по 49 белых и черных колпаков, назовет тот цвет, который преобладает среди 49 человек, следующих за ним по часовой стрелке. Если А — один из таких мудрецов, а Б — 25-ый от него по часовой стрелке мудрец в белом колпаке. Если между А и Б не больше 48 человек, А скажет, что на нем белый колпак, в противном случае Б скажет, что на нем белый колпак. Поскольку все 50 мудрецов в белых колпаках делятся на 25 таких пар (А, Б), 25 из них верно назовут цвет своего колпака, и в итоге будет дано не менее 49+25 = 74 верных ответов.