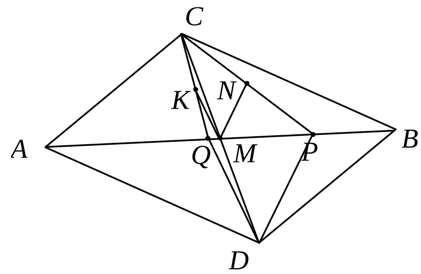
VI олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий первого дня.

1. *Докажите, что в разложение произведения десяти последовательных трёхзначных чисел на простые множители входит не больше 23 различных простых чисел.* (И. Рубанов)

Решение. Заметим, что в разложение трёхзначного числа на простые множители входит не более двух множителей, больших 10 — иначе произведение будет больше 1000. Кроме того, среди 10 последовательных натуральных чисел есть число, делящееся на 10, в разложение которого входит максимум один множитель, больший 10. Таким образом, в разложения десяти последовательных трёхзначных чисел входит не больше 19 простых множителей, больших 10. Вместе с множителями 2, 3, 5, 7 получается не больше 23 различных простых множителей, что и требовалось доказать.



2. *На стороне AB треугольника ABC с углом в 100° при вершине C взяты точки P и Q такие, что AP = BC и BQ = AC. Пусть M, N, K — середины отрезков AB, CP, CQ соответственно. Найдите угол NMK.* (М. Кунгожин + жюри)

Ответ. 40°. **Решение**. Достроим треугольник до параллелограмма $ACBD$. Тогда M является серединой отрезка CD. Так как $AP = BC = AD$ и $BQ = AC = BD$, треугольники APD и BQD — равнобедренные. Поэтому

$$\angle QDP = \angle ADP+\angle BDQ-\angle ADB^\circ = (90^\circ-\angle DAB/2)+(90^\circ-\angle DBA/2)-100^\circ = 80^\circ-(\angle DAB+\angle DBA)/2 = 40^\circ.$$

Осталось заметить, что $\angle QDP = \angle KMN$, так как MK и MN — средние линии треугольников DQC и DPC соответственно.

3. *На сотом году правления Казначей Бессмертный решил начать выпускать новые монеты. В этом году он выпустил в обращение неограниченный запас монет достоинством $2^{100}-1$, на следующий год — достоинством $2^{101}-1$, и т.д. Как только достоинство очередной новой монеты можно будет без сдачи набрать выпущенными ранее новыми монетами, Казначея сместят. На каком году его правления это случится?* (И. Богданов)

Ответ. На двухсотом. **Решение**. Пусть на k-ом году правления 2^k-1 можно набрать выпущенными ранее монетами: $2^k-1 = a_1+\ldots+a_n = N-n$, где N — сумма степеней двойки, каждое из слагаемых в которой делится на 2^{100}. Так как 2^k тоже делится на 2^{100}, на 2^{100} должно делиться и число $n-1$. Так как, очевидно, $n > 1$, получаем $n \geq 2^{100}+1$, откуда $2^k-1 \geq (2^{100}-1)(2^{100}+1) \geq 2^{200}-1$, то есть $k \geq 200$, и раньше 200-го года Казначея не сместят. А на 200-ом году сместят, так как $2^{200}-1 = (2^{100}+1)(2^{100}-1)$.

4. *Среди 49 одинаковых на вид монет — 25 настоящих и 24 фальшивых. Для определения фальшивых монет имеется тестер. В него можно положить любое количество монет, и если среди этих монет больше половины — фальшивые, тестер подает сигнал. Как за пять тестов найти две фальшивых монеты?* (К. Кноп)

Решение. Назовём «рабочими» те монеты, среди которых мы продолжаем искать пару фальшивых. Ситуацию «*рабочими являются N монет, среди которых не менее M фальшивых*» будем обозначать N:M. Если на очередном тесте был сигнал (обозначим это "+"), то после этого мы считаем рабочими те и только те рабочие монеты, которые в тесте участвовали, а если сигнала не было («–), то продолжим считать рабочими те и только те рабочие монеты, которые в этом тесте не участвовали. Вначале имеем ситуацию 49:24. Приведём возможный алгоритм решения задачи.

Тест 1: тестируем 27 монет. +: ситуация 27:14, –: ситуация 22:11. Тест 2 для ситуации 27:14: тестируем 16 монет. +: ситуация 16:9, –: ситуация 11:6. Тест 2 для ситуации 22:11: тестируем 16 монет. При обоих вариантах — ситуация 11:6.

Тест 3 для ситуации 16:9: тестируем 8 монет. При обоих вариантах — ситуация 8:5. Тест 4 для ситуации 8:5: тестируем 4 монеты. При обоих вариантах — ситуация 4:3. Тест 5 для ситуации 4:3: тестируем две монеты. При обоих вариантах — ситуация 2:2, то есть мы нашли пару фальшивых.

Тест 3 для ситуации 11:6: тестируем 8 монет. +: ситуация 8:5, тесты 4 и 5 для которой указаны выше; –: ситуация 3:2. Тесты 4 и 5 для ситуации 3:2 — тестируем дважды по одной монете. Либо обе они окажутся фальшивыми («+»), либо одна будет настоящей («–»), тогда другой фальшивой монетой будет третья из оставшихся.