

## VI олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

### Решения заданий второго дня.

5. Петя и Вася одновременно ввели в свои калькуляторы одно и то же не равное 0 целое число. После этого каждую минуту Петя либо прибавлял к своему числу 10, либо умножал его на 2014; одновременно Вася в первом случае вычитал из своего числа 10, а во втором — делил его на 2014. Могло ли оказаться, что через некоторое время числа у Пети и Васи снова стали равными? (И. Богданов)

**Ответ.** Да, так могло оказаться. **Решение.** Допустим, последним действием перед тем, как числа снова стали равными, Петя умножал на 2014, а Вася делил. Тогда перед этим Петино и Васиное числа были отрицательными, и модуль Васиного числа было в  $2014^2$  раз больше модуля Петиноного. Пусть эти два числа были получены из одного и того же исходного числа  $n$  повторенной  $k$  раз операцией «Петя прибавляет 10, Вася вычитает 10». Это означает, что  $n - 10k = 2014^{2k}(n + 10k)$ .  $10 \cdot (2014^{2k} + 1)k = (1 - 2014^{2k})n$ . Полагая, например,  $n = -10 \cdot (2014^{2k} + 1)$ , получаем, что, начав с такого числа  $n$ , Петя и Вася могли снова уравнивать свои числа, совершив сначала  $2014^{2k} - 1$  операций «Петя прибавляет 10, Вася вычитает 10», а потом одну операцию «Петя умножает на 2014, Вася делит на 2014». **Замечание.** Есть и другие решения.

6. Назовём натуральное число *гористым*, если в его записи есть не стоящая с краю цифра (называемая *вершиной*), которая больше всех остальных, а все остальные цифры ненулевые и сначала нестрого возрастают (то есть каждая следующая цифра больше предыдущей или равна ей) до вершины, а потом нестрого убывают (то есть каждая следующая цифра меньше предыдущей или равна ей). Например, число 12243 — гористое, а числа 3456 и 1312 — нет. Докажите, что сумма всех стозначных гористых чисел — составное число. (С. Берлов)

**Решение.** Назовем два гористых числа *дружественными*, если каждое из них получается из другого записью его цифр в обратном порядке. Заметим, что цифры, которые у одного из дружественных чисел стоят в четных разрядах, у другого стоят в нечетных разрядах. В частности, два дружественных числа не могут совпадать, так как их вершины находятся в разрядах разной четности. Поэтому все гористые числа разбиваются на пары дружественных. Далее, если разность суммы цифр, стоящих в нечетных (с конца) разрядах, и суммы цифр, стоящих в четных разрядах, у одного из двух дружественных чисел равна  $a$ , то у другого она равна  $-a$ . Так как эти разности при делении на 11 дают те же остатки, что и сами дружественные числа, сумма двух дружественных чисел делится на 11. Следовательно, на 11 делится и сумма всех гористых чисел. Поскольку она при этом, очевидно, больше 11, она является составным числом.

7. Десятичная запись натурального числа  $N$  составлена только из единиц и двоек. Известно, что вычёркиванием цифр из этого числа можно получить любое из 10000 чисел, состоящих из 9999 единиц и одной двойки. Найдите наименьшее возможное количество цифр в записи числа  $N$ . (Г. Челноков)

**Ответ.** 10198. **Решение.** **Пример.** Число 1...121...12...21...121...1, где 100 двоек, спереди и сзади — по 99 единиц, а между соседними двойками — по 100 единиц. Число из 9999 единиц и двойки, где перед двойкой идет  $100m+n$  единиц ( $0 \leq m, n \leq 99$ ) получается вычёркиванием всех двоек, кроме  $(m+1)$ -ой,  $99-n$  единиц перед ней и  $n$  единиц за ней. **Оценка.** Заметим, что в числе  $N$  нет двух двоек, идущих подряд — иначе его можно укоротить, вычеркнув одну из этих двоек. Пусть в числе  $N$   $k$  двоек, перед первой двойкой идут  $a_0$  единиц, между первой и второй —  $a_1$  единиц, ..., после последней двойки —  $a_k$  единиц. Положим  $s = a_0 + \dots + a_k$ . Для получения числа, у которого перед двойкой одна единица, нам придется вычеркнуть не меньше  $a_0 - 1$  единиц. Поэтому число  $s - (a_0 - 1)$  должно быть не меньше 9999, то есть  $s - a_0 \geq 9998$ . Для получения числа, у которого перед двойкой  $a_0 + 1$  единица, придется вычеркнуть первую двойку и не меньше  $a_1 - 1$  единиц, откуда получаем неравенство  $s - a_1 \geq 9998$ . Для получения числа, у которого перед двойкой  $a_0 + a_1 + 1$  единица, придется вычеркнуть две первых двойки и не меньше  $a_2 - 1$  единиц, откуда получаем неравенство  $s - a_2 \geq 9998$ . Рассуждая аналогично, получаем, что неравенство  $s - a_i \geq 9998$  выполнено при всех  $i$  от 0 до  $k-1$ ; кроме того, для получения числа, где двойка идет последней, требуется, чтобы  $s - a_k \geq 9999$ . Складывая все эти неравенства, получаем неравенство  $(k+1)s - s \geq 9998(k+1) + 1 \Rightarrow ks > 9998(k+1) \Rightarrow$

$s > 9998 + 9998/k$ . Так как в искомом числе ещё и  $k$  двоек, количество цифр в нем больше, чем  $9998 + 9998/k + k \geq 9998 + 2\sqrt{9998} > 10197$ , что и требовалось доказать.

**8.** Диагональ выпуклого  $101$ -угольника будем называть *главной*, если по одну сторону от неё лежит  $50$ , а по другую —  $49$  вершин. Выбрано несколько главных диагоналей, не имеющих общих концов. Докажите, что сумма длин этих диагоналей меньше суммы длин остальных главных диагоналей. (И. Богданов, С. Берлов)

**Решение.** Назовём *главной диагональю*  $(2n+1)$ -угольника  $K = A_1A_2\dots A_{2n+1}$  любой отрезок вида  $A_iA_{i+n}$  (нумерация вершин циклическая, так что  $A_{i+2n+1} = A_i$ ). Докажем индукцией по  $n$ , что сумма длин любого выбранного набора главных диагоналей многоугольника  $K$ , не имеющих общих вершин, меньше суммы длин оставшихся его главных диагоналей. База при  $n = 1$  следует из неравенства треугольника, ибо главными диагоналями треугольника являются его стороны. Пусть теперь  $n > 1$ . Обозначим сумму длин выбранных главных диагоналей через  $s_1$ , а невыбранных — через  $s_2$ . Можно считать, что выбрана диагональ  $A_1A_{n+2}$ . Тогда диагонали  $A_1A_{n+1}$  и  $A_2A_{n+2}$  не выбраны и пересекаются в некоторой точке  $P$ . Значит,  $A_1A_{n+2} + A_2A_{n+1} < A_1P + PA_{n+2} + A_2P + PA_{n+1} = A_1A_{n+1} + A_2A_{n+2}$  (\*). Рассмотрим теперь многоугольник  $M = A_2\dots A_{n+1}A_{n+3}\dots A_{2n+1}$ . Нетрудно видеть, что его главными диагоналями являются  $A_2A_{n+1}$ , а также все главные диагонали многоугольника  $K$ , не содержащие вершин  $A_1$  и  $A_{n+2}$  (при переходе от  $K$  к  $M$  по каждую сторону от такой диагонали исчезает по одной вершине). Выберем из них те же диагонали, что и в  $K$ , кроме  $A_1A_{n+2}$ . Применяя к ним предположение индукции, получаем  $s_1 - A_1A_{n+2} < s_2 - A_1A_{n+1} - A_2A_{n+2} + A_2A_{n+1}$ . Прибавляя к полученному неравенство (\*), получаем требуемое. Переход доказан.