VI МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа

1. *Ученик за одну неделю получил 13 оценок (из набора 2, 3, 4, 5), среднее арифметическое которых — целое число. Докажите, что какую-то оценку он получил не более двух раз.* (Н. Агаханов).

Решение. Допустим противное. Тогда каждую из оценок 2, 3, 4, 5 ученик получил не меньше трёх раз. Возьмём по три оценки каждого вида. Сумма 12 взятых оценок равна 42, а всех 13 оценок — 44, 45, 46 или 47, в зависимости от того, какова оставшаяся оценка. Но ни одно из чисел 44, 45, 46, 47 не делится нацело на 13.

2. *Эксперту предъявили 12 одинаковых на вид монет, среди которых, возможно, есть фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые — тоже, фальшивая монета легче настоящей. У эксперта есть чашечные весы и эталонные монеты: 5 настоящих и 5 фальшивых. Сможет ли он за 4 взвешивания определить количество фальшивых монет среди предъявленных?* (О. Нечаева)

Ответ. Сможет. **Решение**. Очевидно, достаточно показать, что можно за два взвешивания определить количество фальшивых монет среди шести данных. Назовем эти шесть монет *неизвестными*. Берем три настоящие монеты и три фальшивые, взвешиваем их с неизвестными. Если весы в равновесии, то среди неизвестных монет ровно три фальшивых. Пусть вес эталонных монет больше. Тогда среди неизвестных монет 4, 5 или 6 фальшивых. Возьмём пять эталонных фальшивых и одну эталонную настоящую и взвесим их с неизвестными монетами. При равенстве мы получаем, что среди неизвестных монет ровно 5 фальшивых, если перевесят эталонные — 6 фальшивых, если перевесят неизвестные — 4 фальшивых. Случай, когда при первом взвешивании перевесили неизвестные монеты, рассматривается аналогично, но второе взвешивание производится с 5 эталонными настоящими монетами и одной эталонной фальшивой.

3. *Взяли четыре натуральных числа. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может принимать число N?* (О. Дмитриев)

Ответ. 14. **Решение**. Число N может равняться 14, как показывает, например, четвёрка чисел 4, 15, 70, 84. Осталось показать, что $N \geq 14$.

<u>Лемма</u>. Среди попарных НОД четырёх чисел не может быть ровно двух чисел, делящихся на некоторое натуральное k. <u>Доказательство</u>. Если среди исходных четырёх чисел есть не больше двух чисел, делящихся на k, то среди попарных НОД на k делится не более одного. Если же три из исходных чисел делятся на k, то все три их попарных НОД делятся на k.

Применяя лемму к $k = 2$, получаем, что число N чётно. Применяя её же к $k = 3$, $k = 4$ и $k = 5$, получаем, что N не делится на 3, 4 и 5. Значит, N не может равняться 6, 8, 10 и 12.

4. *На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D такая, что $BD = AC$. Медиана AM этого треугольника пересекает отрезок BD в точке K. Оказалось, что $DK = DC$. Докажите, что $AM+KM = AB$.* (С. Берлов)

Решение. Обозначим через L точку, симметричную K относительно M. Тогда

$$AD = AC - CD = BD - DK = BK = CL.$$

Поскольку углы BDA и ACL равны как соответственные, а $BD = AC$ по условию, треугольники BDA и ACL равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $AB = AL = AM+ML = AM+KM$.

5. *На окружности отметили 2013 точек и каждую соединили с двумя соседними. Также отметили центр окружности и соединили его со всеми остальными отмеченными точками. Можно ли покрасить 1007 отмеченных точек в красный, а остальные 1007 — в синий цвет так, чтобы каждая красная точка была соединена с нечётным числом синих, а каждая синяя — с чётным числом синих?* (И. Рубанов)

Ответ. Нельзя. **Решение**. Допустим, центр окружности красный. Тогда на окружности 1006 красных и 1007 синих точек, и потому там найдутся две синие точки, стоящие рядом. Но тогда и следующая за ними по часовой стрелке точка должна быть синей — иначе найдётся синяя точка, соединённая с одной синей. Продолжая рассуждение, получаем, что все точки, отмеченные на окружности, должны быть синими — противоречие. Допустим, центр окружности синий. Тогда на окружности найдутся две красные точки, стоящие рядом. Но тогда и следующая за ними по часовой стрелке точка должна быть красной — иначе найдётся красная точка, соединённая с двумя синими. Продолжая рассуждение, получаем, что все точки, отмеченные на окружности, должны быть красными — снова противоречие.

6. *Дан выпуклый пятиугольник ABCDE, причём прямая BE параллельна прямой CD и отрезок BE короче отрезка CD. Внутри пятиугольника выбраны точки F и G таким образом, что ABCF и AGDE — параллелограммы. Докажите, что CD = BE + FG.* (К. Кноп, С. Берлов)

Решение. Отметим на отрезке *CD* такую точку *H*, что *CH* = *BE*. Тогда *BEHC* — параллелограмм. Значит, отрезок *EH* параллелен и равен отрезку *BC*, а, тем самым, и отрезку *AF*. Следовательно, *AFHE* — параллелограмм. Теперь получаем, что отрезок *FH* параллелен и равен отрезку *AE*, а, тем самым, и отрезку *GD*. А это значит, что и *FGDH* — параллелограмм. Следовательно, *DH* = *FG*, откуда *CD* = *CH* + *DH* = *BE* + *FG*.

7. *На клетчатой доске размером 2014×2014 закрашено несколько (не меньше одной) клеток так, что в каждом квадратике размером 3×3 клетки закрашено чётное число клеток. Каково наименьшее возможное число закрашенных клеток?* (М. Антипов)

Ответ. 1342. **Решение**. Пример. Закрасим в первой вертикали доски вторую, третью, пятую, шестую, …, 2012-ую и 2013-ую клетки. Тогда в всех квадратах 3×3, примыкающих к левому краю доски, закрашено ровно по две клетки, а во всех остальных закрашенных клеток нет. Всего в этом случае закрашено $2\cdot2013/3 = 1342$ клетки.

Оценка. Пусть на доске закрашено меньше 1342 клеток. Назовём тройку горизонталей доски, идущих подряд, *слабой*, если в ней есть хотя бы две горизонтали, не содержащие закрашенных клеток. Покажем, что *слабые тройки есть*. В самом деле, разобьём все горизонтали доски, кроме первой, на тройки идущих подряд. Получим 671 тройку. Если среди них нет слабых, то в каждой содержится не меньше двух закрашенных клеток, и всего закрашено не меньше, чем $671\cdot2 = 1342$ клетки — противоречие.

Заметим, что *найдётся слабая тройка, в которой есть закрашенные клетки*. Действительно, возьмём произвольную слабую тройку. Если в ней нет закрашенных клеток, то, двигая её в сторону одной из закрашенных клеток, мы рано или поздно наткнёмся на строку, где закрашенные клетки есть, и получим искомую тройку. Зафиксируем её, удалим из прямоугольника 2014×3, составленного из её горизонталей, три крайние правые клетки, а оставшийся прямоугольник 2013×3 разобьём на 671 квадрат 3×3. В каждом из этих квадратов либо две закрашенных клетки, либо ни одной. Если в каждом по две, то всего закрашено не меньше 1342 клеток — противоречие. Значит, найдётся квадрат без закрашенных клеток. Будем двигать его по горизонтали в сторону ближайшей закрашенной клетки. Когда в него впервые попадёт закрашенная клетка, получим квадрат, в котором закрашена ровно одна клетка — противоречие.

8. *Дано 2014 попарно различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что ни одно из данных чисел не может быть равно произведению шести попарно различных простых чисел.* (С. Берлов, В. Сендеров, И. Рубанов)

Решение. Допустим противное: среди данных есть число *a*, равное произведению шести попарно различных простых. Из равенства $ab/(a+b) = b - b^2/(a+b)$ следует, что *ab* делится на *a*+*b* тогда и только тогда, когда b^2 делится на *a*+*b*. Поэтому если число *a* есть на доске, то его квадрат должен делиться на все числа вида *a*+*b*, где *b* — другое данное число. Но таких чисел 2013, а у числа a^2 только $3^6 = 729$ делителей (это следует из известной формулы для числа делителей, дающей в нашем случае результат $(2+1)^6$, но в данном частном случае его нетрудно получить и непосредственно).

Замечание. Числа 2014 не могло оказаться даже среди 15 выбранных. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что все делители вида 2014+*a* больше 2014, а таких делителей у числа 2014^2 ровно $(27-1)/2 = 13 < 14$: все делители числа 2014^2, кроме 2014, делятся на пары дополняющих друг друга до 2014^2, и в каждой паре ровно один делитель больше 2014.