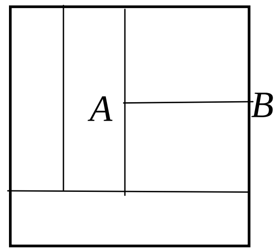
Второй тур дистанционного этапа VI олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Квадрат разрезан на прямоугольники равной площади так, как показано на рисунке. Найдите площадь квадрата, если отрезок AB равен 1.*



Ответ: 4. Решение. Очевидно, точка A является серединой вертикального отрезка, на котором лежит. Поэтому у двух прямоугольников, лежащих левее точки A, вертикальные стороны вдвое длиннее, чем у прямоугольников со стороной AB, и потому их горизонтальные стороны вдвое короче отрезка AB. Следовательно, сторона квадрата равняется $2AB = 2$, откуда и получаем ответ.

2. *Среднее арифметическое нескольких подряд идущих натуральных чисел больше, чем самое маленькое из них, в 5 раз. Во сколько раз среднее арифметическое меньше, чем наибольшее из этих чисел?*

Ответ: В $9/5 = 1{,}8$ раза. Решение. Пусть всего у нас d чисел, и n — наименьшее из них. Тогда их среднее арифметическое равно

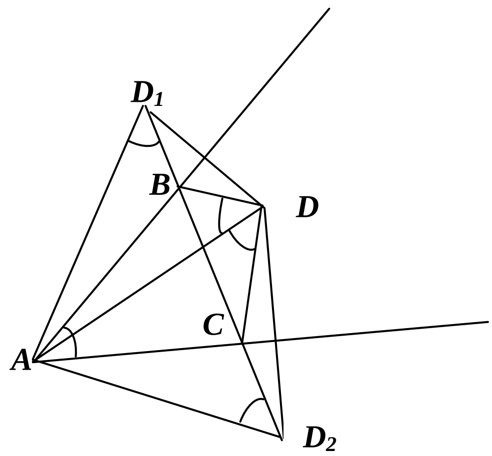
$$(n+(n+1)+\ldots+(n+d-1))/d = (nd+(1+2+\ldots+d-1))/d = n+d(d-1)/2d = n+(d-1)/2.$$

С другой стороны, оно равно $5n$, откуда $d-1 = 8n$. Значит, наибольшее из чисел равно $n+8n = 9n$, что больше среднего арифметического в $9n/5n = 9/5$ раза.

3. *В коробке лежат шарики 10 цветов. Известно, что можно вынуть из коробки 100 шариков так, чтобы в ней шариков всех 10 цветов осталось поровну. Докажите, что в коробку можно добавить 900 шариков так, чтобы в ней шариков всех цветов стало поровну.*

Решение. Пусть для того, чтобы шариков всех 10 цветов стало по k штук, надо удалить 100 шариков, среди которых a_1 шариков первого цвета, a_2 — второго цвета, …, a_{10} — десятого цвета. Тогда если в корзину добавить $100-a_1$ шариков первого цвета, $100-a_2$ — второго цвета, …, $100-a_{10}$ — десятого цвета, шариков всех цветов станет по $k+100$, а всего добавлено будет $1000-(a_1+\ldots+a_{10}) = 1000-100 = 900$ шариков.

4. *Внутри угла BAC, равного 45°, взята точка D так, что каждый из углов ADB и ADC равен 45°. Точки D_1 и D_2 симметричны точке D относительно прямых AB и AC соответственно. Докажите, что точки D_1, D_2, B и C лежат на одной прямой.*



Решение. Так как треугольники ABD и ABD_1 по условию симметричны, $AD_1 = AD$, $\angle BAD_1 = \angle BAD$, $\angle AD_1B = \angle ADB = 45°$. Аналогично, $AD_2 = AD$, $\angle CAD_2 = \angle CAD$, $\angle AD_2C = \angle ADC = 45°$. Из равенств $\angle BAD_1 = \angle BAD$, и $\angle CAD_2 = \angle CAD$ следует, что $\angle D_1AD_2 = 2\angle BAC = 90°$. Так как при этом $AD_1 = AD = AD_2$, имеем $\angle AD_1D_2 = \angle AD_2D_1 = 45°$. Таким образом, $\angle AD_1D_2 = \angle AD_1B$ и $\angle AD_2D_1 = \angle AD_2C$, причем точки B и D_2 лежат с одной стороны от прямой AD_1, а точки C и D_1 — с одной стороны от прямой AD_2, откуда и следует утверждение задачи.

5. *В стране Думуляндии из каждого города выходило ровно 10 дорог, каждая дорога соединяла ровно два города. При этом сеть дорог была связной, то есть из любого города можно было добраться по дорогам до любого другого, возможно, через другие города. Но во время наводнения затопило два города, соединенные дорогой, после чего эта связность нарушилась (так как через затопленные города ездить нельзя). Докажите, что до наводнения можно было закрыть 9 дорог так, чтобы связность сети дорог также нарушилось.*

Решение. В сумме из затопленных городов выходило 18 дорог в другие города (назовем эти дороги затопленными). После наводнения все города распались минимум на две части, и проехать из одной части в другие можно только через затопленные города. Хотя бы в одну из этих частей ведет не более 9 затопленных дорог. Если бы эти дороги закрыли до наводнения, то из этой части также нельзя бы было проехать в остальные города.