Третий тур дистанционного этапа VI олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Коля, Вася и Петя пошли за покупками. Всего у них с собой 2200 рублей, и ни у кого нет монет мельче рубля. У Коли с собой в 18 раз меньше денег, чем у Васи. Докажите, что Петя сможет купить мороженое за 15 рублей.*

Решение. Пусть у Коли n рублей. Тогда у Васи $18n$ рублей, а у Коли с Васей вместе — $19n$ рублей. Так как ни у кого нет монет мельче рубля, n — целое число. Поделив с остатком 2200 на 19, получим $2200 = 115\cdot19+15$. Таким образом, у Коли с Васей вместе не больше $115\cdot19 = 2185$ рублей, поэтому у Пети — не меньше 15 рублей.

2. *На стороне AC треугольника ABC с углом 120 градусов при вершине B отмечены такие точки D и E, что AD = AB и CE = CB. Из точки D опущен перпендикуляр DF на прямую BE. Найдите отношение BD/DF.*

Ответ. 2. Решение. Положим $\angle CAB = \alpha$, $\angle ACB = \beta$. Так как $AD = AB$ и $CE = CB$, имеем

$$\angle DBE = \angle DBA+\angle EBC-\angle ABC = (180°-\alpha)/2+(180°-\beta)/2-120° = 60°-(\alpha+\beta)/2 = 30°.$$

Таким образом, в прямоугольном треугольнике BFD угол при вершине B равен 30°, откуда $BD/DF = 2$.

3. *30 человек выстроены в шесть шеренг по пять человек в каждой. Каждый из них либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт, и всем им известно, кто из них рыцарь, а кто — лжец. Журналист спросил у каждого из них: «Верно ли, что найдутся хотя бы 4 шеренги, в каждой из которых лжецов больше половины?». Какое наибольшее количество ответов "да" он мог услышать?*

Ответ. 21. Решение. Назовем шеренгу *синей*, если в ней больше половины (то есть не меньше трёх) лжецов и *красной*, если лжецов в ней не больше двух.

Пусть «да» сказали рыцари. Тогда у нас не больше двух красных и не меньше четырёх синих шеренг. В красных шеренгах стоят не больше 10 рыцарей, в синих — не больше $2\cdot4 = 8$ рыцарей. Поэтому ответов «да» в этом случае не больше 18.

Пусть «да» сказали лжецы. Тогда у нас не больше трёх синих шеренг и не меньше трёх красных. В синих шеренгах не больше 15 лжецов, в красных — не больше $2\cdot3 = 6$ лжецов, всего — не больше 21 лжеца, то есть ответов «да» в этом случае не больше 21. Ровно 21 ответ «да» возможен, если в трёх шеренгах стоит по 5 лжецов, а в трёх других — по 2 лжеца.

4. *Миша и Маша ехали на поезде в Киров. Миша лежал на полке, а Маша смотрела в окно. «Далеко ли до Кирова?» — спросил Миша у Маши в 12.00. «73 километра», — ответила Маша. На тот же вопрос, заданный в 12.15 и 12.45, Маша ответила: «62 километра» и «37 километров». Известно, что Маша, если расстояние составляло не целое число километров, каждый раз округляла его до ближайшего целого числа (а если таких было два — то до любого из них по своему выбору). Найдите скорость поезда, если известно, что она была постоянной. Укажите все возможности и докажите, что других нет.*

Ответ. 48 км/ч. Решение. Поскольку Маша каждый раз округляла расстояние до ближайшего целого числа, в 12.00 до Кирова было не меньше, чем 72,5 и не больше, чем 73,5 км, в 12.15 — не меньше, чем 61,5 и не больше, чем 62,5 км, а в 12.45 — не меньше, чем 36,5 и не больше, чем 37,5 км. Поэтому за 15 минут с 12.00 до 12.15 поезд проехал не меньше 10 и не больше 12 км, а за 30 минут с 12.15 до 12.45 — не меньше 24 и не больше 26 км. Так как 15 минут — это четверть часа, а 30 минут — половина часа, первое означает, что скорость поезда — не меньше $10\times4 = 40$ км/ч и не больше $12\times4 = 48$ км/ч, а второе — что она не меньше $24\times2 = 48$ км/ч и не больше, чем $26\times2 = 52$ км/ч. Единственная скорость, удовлетворяющая обоим этим условиям, составляет 48 км/ч.

5. *Двое играют в игру. Вначале у них есть прямоугольный лист бумаги размером $m \times n$, где m и n — натуральные числа, большие 1. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок разрезает имеющийся прямоугольник на два, один из которых имеет площадь 1, и выбрасывает прямоугольник единичной площади. Проигрывает тот, после хода которого у оставшегося прямоугольника есть сторона длины строго меньше 1 или остался квадрат 1×1. Кто победит при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнёр, — и как ему для этого надо играть?*

Ответ. Если площадь исходного прямоугольника нечётна, выигрывает первый, если чётна — второй. Решение. *Лемма*. Если площадь S прямоугольника не меньше 3, и обе его стороны длиннее 1, то, отрезав от него единичный прямоугольник параллельно меньшей стороне, мы получим прямоугольник, у которого обе стороны также длиннее 1. *Доказательство*. У прямоугольника, площадь которого не меньше 3, длина наибольшей стороны больше 1,5 — иначе его площадь меньше $1{,}5^2 = 2{,}25$. Если мы отрежем от него прямоугольник площади 1 параллельно меньшей стороне, большая сторона уменьшится на свою $1/S$-ую часть, то есть не больше, чем на треть своей длины. Значит, её длина останется больше 1. Длина стороны, параллельно которой был проведён разрез, не изменится. Лемма доказана.

Итак, играющие могут делать не ведущие к немедленному проигрышу ходы (например, параллельно меньшей стороне оставшегося прямоугольника), пока площадь оставшейся части не окажется равной 2. Это случится после $mn-2$ ходов. Если это число чётно, очередь хода будет за первым, если нечётно — за вторым, и тот, кто делает этот ход, проигрывает. В самом деле, после этого хода останется прямоугольник площади 1. Если обе его стороны равны 1, то это квадрат 1×1, а в остальных случаях меньшая его сторона короче 1.