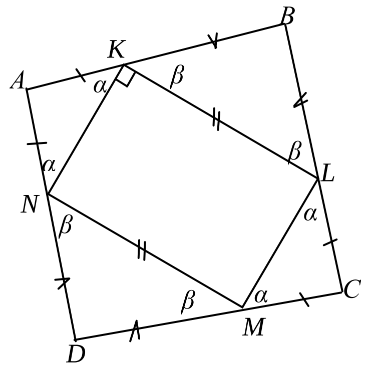
Четвёртый тур дистанционного этапа VI олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Разбойники засыпали сундук доверху золотым и серебряным песком, причём золотого песка насыпали в 2 раза больше по объему, чем серебряного. Али-Баба посчитал, что, если высыпать половину серебряного песка и досыпать сундук доверху золотым песком, цена сундука поднимется на 20 процентов. Как и на сколько процентов изменится стоимость сундука, если высыпать половину золотого песка и досыпать сундук доверху серебряным песком?*

<u>Ответ</u>. Уменьшится на 40%. <u>Решение</u>. Пусть изначально объём серебряного песка в сундуке равен A, стоимость единицы объёма золотого песка составляет x, а стоимость единицы объёма серебряного песка составляет y. Тогда изначальная стоимость сундука составляет $2Ax+Ay$. Стоимость сундука по подсчётам Али-Бабы составляет $2{,}5Ax+0{,}5Ay$, что приводит к равенству $1{,}2(2Ax+Ay) = 2{,}5Ax+0{,}5Ay$ и соотношению $x = 7y$. Тогда во втором случае стоимость сундука составит $Ax+2Ay = 9Ay$, что по отношению к исходной стоимости, равной $2Ax+Ay = 15Ay$, составляет 60%.

2. *На сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$ выбраны соответственно точки K, L, M, N так, что $AK = AN$, $BK = BL$, $CL = CM$, $DM = DN$ и $KLMN$ — прямоугольник. Докажите, что $ABCD$ — ромб.*



<u>Решение</u>. Треугольники ANK, BKL, CLM и DMN — равнобедренные по условию. В равнобедренных треугольниках углы при основании равны. Пусть $\angle AKN = \angle ANK = \alpha$, $\angle BKL = \angle BLK = \beta$. Так как угол NKL прямой, $\alpha+\beta = 90°$. Но $\angle KLB+\angle MLC = 90°$, значит $\angle MLC = \angle LMC = \alpha$. Аналогично рассуждая, получаем $\angle NMD = \angle MND = \beta$. Поскольку $NK = LM$ как противоположные стороны прямоугольника, треугольники AKN и CLM равны по стороне и двум углам. Аналогично равны треугольники BKL и DMN. Тогда $AK = AN = CL = CM$, $BK = BL = DM = DN$, откуда следует, что все стороны четырехугольника $ABCD$ равны.

3. *К переправе подошли царевна Соня и 7 богатырей. Богатыри выстроились в ряд так, что каждые двое рядом стоящих богатырей — друзья, богатыри, стоящие не рядом, между собой не дружат, а царевна дружит со всеми кроме среднего богатыря. Имеется одна лодка, в которой могут плыть либо двое друзей, либо трое попарно дружащих (в одиночку плыть нельзя). Смогут ли переправиться все подошедшие к переправе??*

<u>Ответ</u>. Смогут. <u>Решение</u>. Обозначим С царевну, и пронумеруем богатырей от 1 до 7 по порядку (Соня не дружит с 4-м). Буква и цифры обозначают, кто в лодке, стрелка $\rightarrow$ переправу на другой берег, стрелка $\leftarrow$ — путь обратно. Работает следующий алгоритм:

С12$\rightarrow$, С1$\leftarrow$, 34$\rightarrow$, 23$\leftarrow$, С56$\rightarrow$, С6$\leftarrow$, С12$\rightarrow$, С2$\leftarrow$, С23$\rightarrow$, С5$\leftarrow$, С56$\rightarrow$, С6$\leftarrow$, С67$\rightarrow$.

4. *Петя и Вася играют на клетчатой доске 20×20. Каждым ходом игрок выбирает клетку, у которой все 4 стороны не окрашены, и красит все стороны в красный и синий цвета в любом порядке (например, может покрасить все в один цвет). При этом не должно получаться отрезков одного цвета длиной более чем одна сторона клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Петя. Кто из игроков может выигрывать, как бы ни играл соперник?*

<u>Ответ</u>. Выигрывает Вася. <u>Решение</u>. Вася разбивает все клетки доски на пары центрально симметричных, и ответным ходом красит стороны клетки из той же пары так, чтобы центрально симметричные стороны были покрашены в *разные* цвета. Пока Васина стратегия действует, после его хода в каждой паре центрально симметричных сторон либо обе стороны окрашены в разные цвета, либо обе стороны не окрашены.

Докажем, что Вася всегда может сделать ход. Во-первых, у центрально симметричных клеток нет общих сторон. Поэтому Петя, делая ход, не сможет одновременно окрасить две центрально симметричные стороны. Во-вторых, если 4 окрашенные Петей стороны ограничивают клетку, то и 4 центрально симметричные им стороны тоже ограничивают клетку, и все они не окрашены. Вася может их красить.

Покажем, что, действуя по стратегии, Вася не образует запрещённых одноцветных отрезков. Пусть покрашенная Васей сторона AB продолжила уже покрашенную сторону BC. Если B — центр доски, то стороны AB и BC центрально симметричны, и покрашены по Васиной стратегии в разные цвета. Иначе AB и BC центрально симметричны сторонам $A'B'$ и $B'C'$, при этом Петя предыдущим ходом смог покрасить сторону $A'B'$, значит, $A'B'$ и $B'C'$ — разного цвета. При смене цветов на противоположные они останутся разного цвета, так что AB и BC — разного цвета, и отрезок AC не запрещён.

Итак, по указанной стратегии Вася может всегда сделать ход, поэтому он не проиграет. А так как доска конечна и игра закончится, Вася выиграет.

5. *Какое наибольшее количество двузначных чисел можно записать в ряд так, чтобы любые два соседних числа были не взаимно просты, а любые два несоседних числа – взаимно просты?*

Ответ. 10. Решение. Десять чисел написать можно: 11, 77, 91, 65, 85, 51, 57, 38, 46, 23. Пусть нам удалось написать 11 таких чисел. Выпишем для каждой пары соседних чисел их общий делитель, отличный от 1. Получится 10 чисел, любые два из которых взаимно просты. Все эти числа либо однозначные, либо двузначные. Но нельзя выбрать более четырёх однозначных чисел, отличных от 1, любые два из которых взаимно просты. Поэтому в построенном ряду из 10 чисел будет не менее шести двузначных. Значит, какие-то два из них стоят рядом, и какое-то из чисел исходного ряда делится на каждое из них. Но, поскольку они взаимно просты, оно делится и на их произведение. А двузначное число не может делиться на произведение двух двузначных чисел.