VII олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. *40 разбойников переправились с помощью двухместной лодки с левого берега реки на правый (некоторые рейсы, возможно, выполнялись в одиночку). Могло ли случиться, что каждая пара разбойников пересекла реку вместе ровно один раз (с левого берега на правый или с правого на левый)?* (А. Шаповалов)

Ответ. Нет, не могло. **Решение**. Допустим, что могло. Заметим, что лодка должна сделать нечётное число рейсов. Поскольку с парами разбойников она сделала $40\cdot 39/2 = 780$ рейсов, то должно быть нечётное число рейсов с одиночными разбойниками. Следовательно, кто-то из разбойников нечётное число раз перегонял лодку в одиночку. Но с другими разбойниками он тоже сделал нечётное число (39) рейсов, поэтому всего — чётное число. Значит, он остался на исходном берегу.

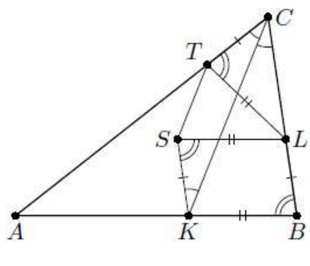
6. *Натуральное число называется* ***совершенным****, если оно вдвое меньше суммы всех своих натуральных делителей: например, совершенным является число 6, так как $2\cdot 6 = 1+2+3+6$. Может ли сумма всех попарных произведений натуральных делителей совершенного числа n делиться на n^2?* (С. Берлов)

Ответ. Не может. **Решение**. Заметим, что совершенное число равно сумме всех своих натуральных делителей, меньших его самого. Пусть у совершенного числа n такие делители равны $d_1, \ldots, d_k$. Сумма всех попарных произведений его делителей равна $nd_1+\ldots+nd_k+d_1d_2+d_1d_3+\ldots+d_1d_k+d_2d_3+\ldots+d_{k-1}d_k$. Так как $nd_1+\ldots+nd_k = n(d_1+\ldots+d_k) = n^2$, достаточно убедиться, что на n^2 не делится сумма $D = d_1d_2+d_1d_3+\ldots+d_1d_k+d_2d_3+\ldots+d_{k-1}d_k$. А это так, потому что $0 < 2D = (d_1+\ldots+d_k)^2-\left(d_1^2+\ldots+d_k^2\right) < n^2$.

7. *В стране Графинии n ($n \geq 2$) городов. Некоторые города соединены беспосадочными авиалиниями (по каждой авиалинии выполняются рейсы в обоих направлениях) таким образом, что из любого города можно самолётами (возможно, с пересадками) добраться до любого другого, но закрытие любой авиалинии нарушает это свойство. При этом из любого города выходит не больше d авиалиний. Докажите, что все города Графинии можно разбить не более чем на $\frac{n}{2}+d$ групп таким образом, чтобы каждая авиалиния соединяла города из разных групп и для любых двух групп существовало не более одной авиалинии, соединяющей города из этих групп.* (Д. Карпов)

Решение. Рассмотрим граф, где вершины — города, а рёбра — авиалинии. По условию он является деревом, вершины которого, как известно, можно занумеровать двумя цифрами так, чтобы любые две смежные вершины были отмечены разными цифрами. Сделаем это и покрасим в чёрный цвет вершины, отмеченные той цифрой, которой отмечено не меньше половины всех вершин. Остальные вершины покрасим в разные цвета, для этого хватит $n/2$ цветов. Докажем индукцией по количеству вершин, что черные вершины любого дерева, у которого степени всех вершин не превосходят d, можно перекрасить в d цветов так, чтобы две вершины, имеющие общую соседнюю, были разноцветными. Так как $n \geq 2$, у дерева есть не чёрная вершина x. Пусть $y_1, \ldots, y_k$ — соседи вершины x, они черные и $k \leq d$. Тогда при удалении вершины x получается k деревьев, каждое из которых меньше исходного и может быть покрашено по предположению индукции. Так как покраски этих деревьев независимы, можно покрасить их так, чтобы все вершины $y_1, \ldots, y_k$ имели разные цвета, что нам и нужно. Вернемся к задаче и покрасим черные вершины нашего дерева, как сказано выше. Предположим, что пары соседних вершин a_1b_1 и a_2b_2 имеют одинаковые наборы цветов. Тогда не чёрные вершины a_1 и a_2 в этих парах совпадают. Но все соседи вершины a_1 разноцветны, противоречие.

8. *CK — биссектриса треугольника ABC. На сторонах BC и AC выбраны точки L и T соответственно такие, что $CT = BL$ и $TL = BK$. Докажите, что треугольник с вершинами в точках C, L и T подобен исходному.* (С. Берлов)



Решение. Отметим такую точку S, что $BLSK$ — параллелограмм. Если S совпала с T, то подобие очевидно. Если же S не совпала с T, то поскольку $CT = BL = KS$ и • SKC = • KCL = • KCA, точки K, C, T, S — вершины равнобедренной трапеции. Так как $TL = KB = LS$, то точка L лежит на оси симметрии этой трапеции, следовательно, • CTL = • KSL = • KBL, откуда и следует требуемое подобие.