VII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
3 (заключительный) этап, 25-28 марта 2015 г.

Первый день.

1. Назовём *хорошими прямоугольниками* квадрат со стороной 2 и прямоугольник со сторонами 1 и 11. Докажите, что любой прямоугольник с целочисленными сторонами, большими 100, можно разрезать на хорошие прямоугольники.

2. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC. На продолжении стороны BC за точку C отметили точку N так, что $2BN = AB+BC$. Пусть BS — биссектриса треугольника ABC, M — середина стороны AC, а L — такая точка на отрезке BS, что $ML \parallel AB$. Докажите, что $2LN = AC$.

3. По кругу написаны 2015 положительных чисел. Сумма любых двух рядом стоящих чисел больше суммы обратных к двум следующим за ними по часовой стрелке. Докажите, что произведение всех этих чисел больше 1.

4. На каждой стороне квадрата выбрано по 100 точек, из каждой выбранной точки внутрь квадрата проведён отрезок, перпендикулярный соответствующей стороне квадрата. Оказалось, что никакие два из проведённых отрезков не лежат на одной прямой. Отметим все точки пересечения этих отрезков. При каком наибольшем $k < 200$ может случиться так, что на каждом проведённом отрезке лежит ровно k отмеченных точек?