VII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

1. *На доске написаны четыре числа, ни одно из которых не равно 0. Если каждое из них умножить на сумму трёх остальных, получатся четыре одинаковых результата. Докажите, что квадраты записанных на доске чисел равны.* (И. Рубанов).

2. *Разрешается вырезать из шахматной доски размером 20×20 любые 18 клеток, а потом выставить на оставшиеся клетки несколько ладей, не бьющих друг друга. Какое наибольшее число ладей можно выставить таким образом? Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной горизонтали или вертикали доски и между ними нет вырезанных клеток.* (О. Дмитриев, Р. Женодаров)

3. *Делитель натурального числа называется* ***собственным****, если он меньше этого числа, но больше 1. У натурального числа n нашли все собственные делители (их оказалось не меньше трёх) и записали всевозможные их попарные суммы (повторно одинаковые суммы не записывали). Докажите, что полученный набор не мог оказаться набором всех собственных делителей никакого натурального числа.* (А. Храбров)

4. *Серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC выпуклого четырёхугольника ABCD пересекают стороны CD и DA в точках P и Q соответственно. Оказалось, что $\angle APB = \angle BQC$. Внутри четырёхугольника выбрана точка X такая, что $QX \parallel AB$ и $PX \parallel BC$. Докажите, что прямая BX делит диагональ AC пополам.* (С. Берлов)

5. *На столе лежит палочка длиной 10 см. Петя ломает её на две части и кладёт обе получившиеся палочки на стол. С одной из лежащих на столе палочек Вася проделывает ту же операцию, потом то же делает Петя и т.д., по очереди. Петя хочет, чтобы после 18 разломов все получившиеся палочки были короче 1 см. Вася хочет помешать Пете. Кто из них имеет возможность добиться своей цели независимо от действий соперника?* (И. Рубанов, С. Берлов)

6. *Зрители оценивают фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычисляется как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени T рейтинг был целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента T?* (О. Дмитриев, Р. Женодаров)

7. *В трапеции ABCD, где $AD \parallel BC$, угол B равен сумме углов A и D. На продолжении отрезка CD за вершину D отложен отрезок $DK = BC$. Докажите, что $AK = BK$.* (Б. Обухов)

8. *На шахматной доске размером 20×20 расставлены 220 коней, которые бьют все свободные клетки. Докажите, что можно убрать 20 коней таким образом, чтобы оставшиеся кони били все свободные клетки. Напомним, что конь бьёт буквой «Г» (см. рисунок).* (С. Берлов)