VIII олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. *Можно ли прямоугольник 1000×2016 разрезать на прямоугольники 1×2015 и трёхклеточные «уголки» так, чтобы присутствовали фигурки обоих видов?* (Е. Бакаев)

Ответ. Нельзя. **Решение**. Допустим, можно. Очевидно, каждый из прямоугольников 1×2015 примыкает к одной из коротких сторон прямоугольника 1000×2016, а от другой стороны отстоит на одну клетку. Назовём прямоугольник 1×2015 *чёрным* (соответственно, *белым*), если эта клетка покрыта уголком, две другие клетки которого находятся выше (соответственно, ниже) этого прямоугольника.

Самый нижний из прямоугольников 1×2015 должен быть чёрным: иначе ниже него расположен прямоугольник 2016×k, количество клеток которого делится на 3 и который должен быть полностью замощён трёхклеточными уголками и «доминошкой» из двух клеток, что невозможно. По той же причине самый верхний из прямоугольников 1×2015 должен быть белым. Но тогда среди прямоугольников 1×2015 найдутся чёрный и белый, лежащий выше этого чёрного, между которыми нет других таких прямоугольников. Лежащий между ними прямоугольник 2016×k должен быть полностью замощён трёхклеточными уголками и двумя «доминошками» из двух клеток, что невозможно.

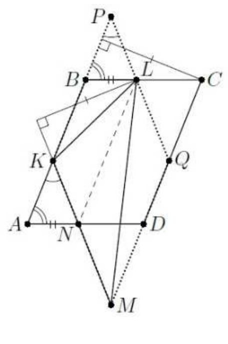
6. *В школе 30 кружков, в каждом занимаются 40 детей. Для каждого* i = 1, 2, ..., 30 *обозначим через* n_i *количество детей, занимающихся ровно в* i *кружках. Докажите, что в этой же школе можно организовать 40 кружков с 30 детьми в каждом так, чтобы числа* n_i *для этих новых кружков были бы теми же самыми.* (В. Дольников)

Решение. Выпишем в ряд членов первого кружка, за ними — второго и т.д. При этом если ребёнок входит и в i-ый и в (i+1)-ый кружок, мы его в списке (i+1)-ого кружка записываем таким же по счёту, что в списке i-го. Нарезав получившийся длинный список на куски длины 30, получим 40 новых кружков, которые, очевидно, удовлетворяют условию задачи. При этом никто не попадёт в один кружок дважды, потому что расстояние между двумя вхождениями в длинный список одного и того же ребёнка по построению не меньше 40, а, значит, и не меньше 30.

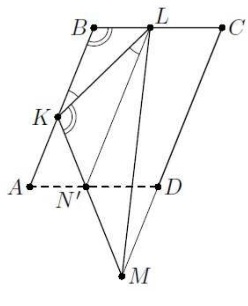
7. *Сумма неотрицательных чисел* a, b, c *и* d *равна 4. Докажите, что* $(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc) \le 8$. (А. Храбров)

Решение. $\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)} \le \dfrac{ab+cd+ac+bd}{2} = \dfrac{(a+d)(b+c)}{2} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a+b+c+d}{2}\right)^2 = 2.$ Аналогично, $\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)} \le 2$ и $\sqrt{(ac+bd)(ad+bc)} \le 2$. Перемножая три полученных неравенства, получаем искомое.

8. *Дан параллелограмм ABCD. На сторонах AB и BC и продолжении стороны CD за точку D выбраны соответственно точки K, L и M так, что треугольники KLM и BCA равны (именно с таким соответствием вершин). Отрезок KM пересекает отрезок AD в точке N. Докажите, что LN || AB.* (Б. Обухов)



Первое решение. Проведём через L прямую, параллельную KM; пусть она пересекает прямые AB и CD в точках P и Q соответственно. Заметим, что высоты треугольников BCA и KLM, опущенные из соответственных вершин C и L, равны; в свою очередь, они равны расстояниям между парами параллельных прямых AB, CD и KM, PQ. Значит, эти прямые образуют ромб $KPQM$, то есть $PK = KM = AB$. Отсюда имеем $BP = KP–KB = AB–KB = AK$. Кроме того, из параллельности получаем $\angle AKN = \angle BPL$ и $\angle NAK = \angle LBP$. Значит, треугольники AKN и BPL равны; в частности, $AN = BL$. Поэтому четырёхугольник $ANLB$ — параллелограмм, и $LN \parallel AB$.



Второе решение. Проведём через точку L прямую, параллельную AB. Пусть она пересекает прямую KM в точке N'. Тогда $\angle BKL = \angle KLN'$; кроме того, по условию $\angle KBL = \angle LKN'$. Следовательно, треугольники BKL и KLN' подобны по двум углам, откуда $KN'/BL = LN'/KL = LN'/BC$ (последнее равенство верно, поскольку $KL = BC$). С другой стороны, в трапеции $MKBC$ отрезок $N'L$ параллелен основаниям, поэтому $KN'/BL = KM/BC = AB/BC$. Таким образом, $LN'/BC = KN'/BL = AB/BC$, то есть $LN' = AB$. Значит, $ABLN'$ — параллелограмм, а значит, точка N' лежит на AD и, следовательно, совпадает с N, откуда $LN \parallel AB$.