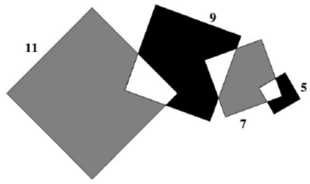
Первый тур дистанционного этапа VIII олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Квадраты со сторонами 11, 9, 7 и 5 расположены примерно так, как на рисунке. Оказалось, что площадь серых частей в два раза больше, чем площадь черных частей. Найдите площадь белых частей.*



Ответ. 42. Решение. Пусть площадь белых частей равна x, а площадь чёрных частей равна y. Суммарная площадь белых и черных частей равна $9^2+5^2 = 106 = x+y$, а суммарная площадь белых и серых частей равна $11^2+7^2 = 170 = x+2y$. Вычитая из второго равенства первое, находим, что $y = 64$, откуда $x = 106–y = 42$.

2. *В подводном царстве живут осьминоги, у которых может быть 6, 7 или 8 ног. Те, у которых по 7 ног, всегда лгут, а остальные всегда говорят правду. При встрече четверых осьминогов Синий сказал: «у нас на всех в сумме 25 ног», Зеленый возразил: «нет, всего ног 26», Красный сказал, что в сумме ног 27, а Жёлтый – что 28. Сколько ног в реальности у каждого из осьминогов?*

Ответ. У Красного — 6, у остальных — по 7. Решение. Если бы лгали все четверо, у них вместе было бы 28 ног, и Жёлтый был бы прав — противоречие. Значит, среди четверых есть правдивый. Он ровно один, так как любые два высказывания осьминогов противоречат друг другу. Значит, у трёх осьминогов по 7 ног, а у одного — 6 или 8. Второе невозможно, так как тогда у осьминогов вместе было бы 29 ног, в то время как ни один из осьминогов такой суммы не назвал. Значит, у правдивого 6 ног, и это Красный, назвавший правильную сумму 27.

3. *В треугольнике ABC точка M — середина AC, кроме того, $BC = 2AC/3$ и $\angle BMC= 2\angle ABM$. Найдите отношение AM/AB.*

Ответ. $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$. Решение. Положим $\angle ABM = \alpha$. Тогда $\angle BMC = 2\alpha$, $\angle BMA = 180°–2\alpha$, $\angle BAM = 180°–\angle ABM–\angle AMB = \alpha = \angle ABM$, откуда $BM = AM = MC$. Получается, что медиана BM треугольника ABC равна половине стороны AC, откуда $\angle ABC = 90°$.

Положим $BC = 4m$. Тогда $AC = 6m$, $AM = 3m$, $AB = \sqrt{36m^2-16m^2}=2m\sqrt{5}$, и, деля AM на AB, получаем ответ.

4. *Из клетчатого квадрата со стороной 2015 вырезали по клеточкам несколько квадратов со стороной 10. Докажите, что из оставшейся части большого квадрата можно вырезать:*

а) *прямоугольник со сторонами 1 и 10;* **б)** *пять прямоугольников со сторонами 1 и 10.*

Решение. Докажем сразу более сильное утверждение б). Рассмотрим прямоугольник 1×10, примыкающий своей короткой стороной к левой стороне квадрата 2015×2015. Если какая-то из его клеток попала в вырезанный квадрат 10×10, то туда же попала и самая правая его клетка. Значит, если самая правая клетка такого прямоугольника не вырезана, то не вырезана ни одна из его клеток. Осталось заметить, что число 2015 при делении на 10 дает остаток 5, и потому в десятом слева столбце квадрата 2015×2015 найдутся хотя бы пять не вырезанных клеток.

5. *Известно, что и сумма и произведение двух натуральных чисел a и b — квадраты натуральных чисел. Докажите, что число $|16a–9b|$ — не простое.*

Решение. Если $16a–9b = 0$, утверждение задачи очевидно. Далее считаем, что $16a–9b \neq 0$.

Положим d = НОД(a, b), и пусть $a = dm$, $b = dn$. Тогда $ab = d^2mn = c^2$. Поскольку числа m и n взаимно просты, в их разложения на простые множители все простые числа входят в чётных степенях. Поэтому m и n — квадраты натуральных чисел: $m = u^2$, $n = v^2$.

Пусть $d > 1$. Тогда $|16a–9b| = d|((4u)^2–(3v^2))| = d(4u+3v)|(4u–3v)|$. Это составное число, поскольку $d > 1$ и $4u+3v > 1$.

Пусть $d = 1$. Тогда $|16a–9b| = (4u+3v)|(4u–3v)|$. Если $|4u–3v| \neq 1$, всё доказано. Иначе $4u–3v = \pm1$, то есть $4u = 3v\pm1$. По условию $16(a+b) = 16f^2 = 16u^2+16v^2 = (3v\pm1)^2+16v^2 = 25v^2\pm6v+1$. Но от числа $25v^2 = (5v)^2$ до ближайших соседних квадратов $(5v\pm1)^2$ расстояние минимум $(5v)^2–(5v–1)^2 = 10v–1$, что больше, чем $6v+1$. Поэтому получается, что число $(4f)^2 = 16f^2$ не является квадратом натурального числа — противоречие. Итак, случай $4u–3v = \pm1$ невозможен, что и завершает доказательство.