X олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. *Целые числа a, b, c и натуральное число n таковы, что* $a+b+c = 1$ *и* $a^2+b^2+c^2 = 2n+1$. *Докажите, что* $a^3+b^2-a^2-b^3$ *делится на n.* (Н. Агаханов)

Решение. Из условия следует, что $a^2+b^2+(1-a-b)^2 = 2n+1$, откуда $a^2+b^2+ab-(a+b) = n$. Поэтому $a^3+b^2-a^2-b^3 = (a^3-b^3)+(b^2-a^2) = (a-b)(a^2+b^2+ab-(a+b)) = (a-b)\cdot n$, что и требовалось доказать.

6. *Среди десяти человек ровно один лжец и 9 рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждому из них дали карточку с натуральным числом от 1 до 10, причем все числа на карточках различны. Любому можно задать вопрос: «Верно ли, что на твоей карточке написано число M?» (M может быть только натуральным числом от 1 до 10). Верно ли, что за 17 таких вопросов можно гарантированно найти лжеца?* (О. Подлипский)

Ответ. Верно. **Решение**. Зададим одному человеку 9 вопросов — про числа от 1 до 9. Если он лжец, мы получим не меньше восьми положительных ответов и тем самым найдем его. В противном случае он рыцарь, и мы узнаем, что написано на его карточке: если число от 1 до 9, то мы получим утвердительный ответ на соответствующий вопрос, а если число 10, то все ответы будут отрицательными. Узнав, какое число M написано на карточке у первого, зададим восьмерым из остальных вопрос про это число. Если кто-то ответит утвердительно — лжец он, если все ответят отрицательно — лжец тот, кому мы не задавали вопросов.

7. *Из клетчатой доски размером 70×70 вырезали 2018 клеток. Докажите, что доска распалась не более чем на 2018 кусков. Два куска, не имеющие общих точек кроме вершин клеток, считаются не соединёнными друг с другом.* (И. Рубанов)

Решение. Нетрудно построить цикл, проходящий по разу через все клетки доски 70×70 так, что соседние клетки в нем имеют общую сторону: можно, например, пройти всю первую вертикаль от нижней клетки до верхней, потом ходить по вертикалям «змейкой» от верхней горизонтали до второй снизу и обратно, а по последней вертикали вернуться на первую горизонталь и по ней — в исходную клетку. «Расклеим» все общие стороны клеток на доске, кроме общих сторон между соседними клетками нашего цикла. Даже после этого 2018 выброшенных клеток будут разбивать этот цикл не более чем на 2018 частей, а при обратной склейке цикла в доску число частей не увеличится.

8. *Вершина F параллелограмма ACEF лежит на стороне BC параллелограмма ABCD. Известно, что* $AC = AD$ *и* $AE = 2CD$. *Докажите, что* $\angle CDE = \angle BEF$. (А. Кузнецов)

Первое решение. Пусть M — середина отрезка CF. Поскольку четырехугольник $ACEF$ — параллелограмм, точка M является серединой отрезка AE. Обозначим $\angle MAC = \angle MEF = \alpha$ и $\angle ABC = \angle ADC = \angle ACD = \beta$. Так как $AM = AE/2 = CD$, $AMCD$ — равнобокая трапеция, откуда мы получаем что $\alpha = \angle MAC = \angle MDC$ и $MD = AC = AD$. Кроме того, поскольку $MA = CD = AB$ и $\angle ABM = \angle ADC = \beta$, равнобедренные треугольники ABM и ACD подобны, поэтому $AB/BM = AC/CD$. Треугольники BME и EMD также подобны, так как

$$\angle BME = 180° - \beta = 180° - \angle DMA = \angle EMD \text{ и } BM/ME = BM/MA = CD/AD = MA/MD = EM/MD.$$

Значит, $\angle BEM = \angle EDM$, откуда $\angle BEF = \angle BEM - \alpha = \angle EDM - \alpha = \angle CDE$, что и требовалось.

Второе решение. Как и в первом решении, введём точку M и покажем, что $AMCD$ — равнобокая трапеция. Отложим на луче DC отрезок $CS = DC = ME$. Поскольку $\angle SCB = \angle ABC = \beta = \angle EMC$, перпендикуляры, опущенные на BC из точек E и S, равны, откуда $SE \parallel BC$. Поэтому четырёхугольники $MSEC$ и $ASED$ — также равнобокие трапеции; в частности, $ASED$ вписана в некоторую окружность ω. С другой стороны, поскольку отрезки AB и CS параллельны и равны, $ACSB$ — параллелограмм, откуда $BS = AC = AD$. Значит, $DABS$ — также равнобокая трапеция. Поскольку точки A, S и D лежат на ω, точка B лежит на этой же окружности. Из вписанного четырёхугольника $BSED$ теперь получаем $\angle SBE = \angle SDE = \angle CDE$. Осталось заметить, что $BSEF$ — параллелограмм (ибо BS параллелен и равен FE), откуда $\angle BEF = \angle SBE = \angle CDE$.