Второй тур дистанционного этапа XIV олимпиады имени Леонарда Эйлера

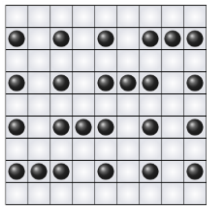
Решения задач

1. *В 9:00 в путь отправился пешеход. Через час вслед ему из того же начального пункта выехал велосипедист. В 10:30 он догнал пешехода и поехал дальше, но через некоторое время велосипед сломался. Закончив ремонт, велосипедист поехал вслед пешеходу дальше и в 13:00 снова догнал его. Сколько минут занял ремонт? (Скорость пешехода постоянна, и он двигался без остановок, скорость велосипедиста тоже постоянна, и он двигался с единственным перерывом на ремонт.)* (И. Рубанов)

<u>Ответ</u>. 100 минут. <u>Решение</u>. Велосипедист догнал пешехода через полчаса после своего старта и через полтора часа после старта пешехода. Значит, он движется втрое быстрее пешехода. До места второй встречи с велосипедистом пешеход шёл 4 часа = 240 минут. Если бы велосипедист ехал без остановки на ремонт, он доехал бы до этого места за $240 : 3 = 80$ минут. На самом же деле он потратил на это 3 часа = 180 минут. Значит, на ремонт он потратил 180–80 = 100 минут.

2. *Можно ли отметить несколько клеток в таблице 9×9, чтобы в любых двух соседних строках таблицы было отмечено не меньше 6 клеток, а в любых двух соседних столбцах — не больше 5 клеток?* (С. Берлов)

<u>Ответ</u>. Можно. <u>Решение</u>. Один из примеров — на рисунке справа.



<u>Комментарий</u>. Покажем, как можно придумать такой пример. В парах строк 1-2, 3-4, 5-6, 7-8 не меньше 6x4 = 24 отмеченных клеток. С другой стороны, в парах столбцов 2-3, 4-5, 6-7, 8-9 не больше 5x4 = 20 отмеченных клеток. Поэтому в первом столбце не меньше 4 отмеченных клеток. Аналогично показывается, что не меньше 4 отмеченных клеток в 3, 5, 7 и 9 столбцах. Теперь уже нетрудно построить пример с рисунка или аналогичный ему, где в каждом нечетном столбце ровно по 4 отмеченных клетки, в каждом четном столбце — по одной, а в каждой четной строке — ровно 6.

Допустим, в одном из столбцов 5 отмеченных клеток. Тогда во соседних с ним столбцах отмеченных клеток нет, значит в соседних с ними нечетных столбцах отмеченных клеток снова по 5 и т. д., то есть во всех нечетных столбцах по 5 отмеченных клеток, а во всех четных отмеченных клеток нет. Эти соображения приводят к другой серии примеров, где во всех нечетных строках по 5 отмеченных клеток, а во всех четных — по одной (читатель легко построит такой пример сам). Из проведенных рассуждений следует, что других разновидностей примеров, кроме описанных нами, нет.

3. *$ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, где $AB = 7$, $BC = 4$, $AD = DC$, $\angle ABD = \angle DBC$. Точка E на отрезке AB такова, что $\angle DEB = 90°$. Найдите длину отрезка AE.* (Испания, fase local, 2020-2021)

<u>Ответ</u>. 1,5. <u>Решение</u>. Отложим от точки B на луче BA отрезок $BF = BC$. Треугольники DBF и DBC равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $DF = DC = DA$, то есть DE — высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника ADF. Так как она является также и медианой, имеем $AE = AF/2 = (AB–BF)/2 = (7–4)/2 = 1{,}5$.

4. *Докажите, что если прямые $y = kx+m$, $y = mx+n$ и $y = nx+k$ на координатной плоскости имеют общую точку, то они совпадают.* (С. Токарев)

<u>Решение</u>. Пусть $k \geq m$ и $k \geq n$ (случаи, когда наибольшим коэффициентом является m или n, аналогичны). Пусть a — абсцисса какой-либо общей точки прямых. Тогда $ka+m = ma+n = na+k$, откуда $(k–m)a = n–m$, $(m–n)a = k–n$ и $(n–k)a = m–k$.

Допустим, коэффициенты k, m, n попарно различны. Тогда $a = (n–m)/(k–m) = (k–n)/(m–n)$, откуда $(k–m)(k–n) = –(n–m)^2$. Но по нашему предположению $k > m$ и $k > n$, поэтому левая часть последнего равенства положительна и не может равняться правой, которая не положительна. Значит, рассматриваемый случай невозможен.

Допустим, $k = m$. Тогда $n–m = (k–m)a = 0$, откуда $m = n = k$, и прямые совпадают. Случаи $k = n$ и $m = n$ рассматриваются аналогично.

5. *Даны натуральные числа a и b ($a > 1$), причём b делится на a^2. Кроме того, любой делитель числа b, меньший, чем $\sqrt{a}$, является также делителем числа a. Докажите, что у числа a не более трех различных простых делителей.* (А. Голованов, И. Богданов)

<u>Решение</u>. Допустим, у числа a есть четыре различных простых делителя p, q, r и s. Тогда $a = p^kq^lr^ms^nc$, где $k, l, m, n \geq 1$ и c — некоторое натуральное число. не делящееся на p, q, r и s. С точностью до выбора обозначений можно считать, что p^k — наименьший из первых четырех сомножителей в этом разложении. Тогда $p^{4k} < p^kq^lr^ms^n \leq a$, то есть $p^{2k} < \sqrt{a}$. Но так как b делится на a^2, то b делится и на p^{2k}, и получается, что a должно делиться на p^{2k}, что противоречит нашему построению.