Первый тур дистанционного этапа XV олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

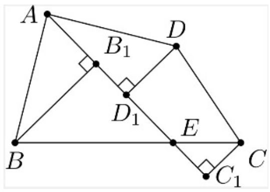
1. *На дискотеку пришли 42 человека: мальчики и девочки. Каждая девочка потанцевала со всеми мальчиками, кроме четырёх, а каждый мальчик потанцевал со всеми девочками, кроме трёх. Сколько мальчиков было на танцах?* (Фольклор)

Ответ. 24. Решение. Пусть на дискотеку пришли m мальчиков и d девочек. Обозначим мальчиков синими точками, девочек — красными и соединим отрезками мальчиков и девочек, **не** танцевавших друг с другом. Пусть всего получилось k отрезков. Так как из каждой красной точки выходит 4 отрезка, а из каждой синей — 3 отрезка, и каждый отрезок соединяет красную и синюю точки, выполнены равенства $4d = k = 3m$, откуда $d = 3m/4$. По условию $m+d = m+3m/4 = 7m/4 = 42$, откуда $m = 24$.

2. *Запишите четыре числа (не обязательно целых), среди которых нет одинаковых, чтобы выполнялось такое условие: если число x есть среди записанных, то хотя бы одно из чисел $x-1$ или $6x-1$ тоже есть среди записанных.* (И. Рубанов, С. Берлов)

Ответ. Например, 1/5, 6/5, 11/5, 16/5. Решение. Пусть записаны числа x, $x+1$, $x+2$, $x+3$. Для трёх последних чисел условие задачи, очевидно, выполнено. Чтобы оно было выполнено и для первого, подберём x так, чтобы выполнялось равенство $x = 6x-1$. Решая полученное уравнение, находим, что $x = 1/5$, откуда и получаем приведённый выше ответ. Замечание. Найденный ответ — далеко не единственный. Ещё три четвёрки чисел, удовлетворяющие условию задачи, можно получить, приравнивая $6x-1$ числам $x+1$, $x+2$ или $x+3$. Другие подходящие четвёрки можно находить, заменяя последовательность x, $x+1$, $x+2$, $x+3$ на другую, где условие задачи при любом x выполняется для всех чисел, кроме одного, например, на x, $6x-1$, $6x-2$, $6x-3$.

3. *Внутри стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ нашлась такая точка E, что прямая AE делит четырёхугольник на две равные по площади части. Какая из вершин четырехугольника находится дальше всех от прямой AE?* (И. Рубанов, Д. Ширяев)



Ответ. Вершина B. Решение. Опустим перпендикуляры BB_1, CC_1, DD_1 на прямую AE. Тогда

$$DD_1 \cdot AE = 2S(ADE) < 2S(ADCE) = 2S(ABE) = BB_1 \cdot AE,$$

откуда $DD_1 < BB_1$. Аналогично из неравенства $2S(ACE) < 2S(ADCE)$ получаем, что $CC_1 < BB_1$. Поскольку расстояние от точки A до прямой AE равно 0, получаем, что вершина B удалена от прямой AE больше, чем все остальные вершины четырехугольника $ABCD$.

4. *Петя и Вася играют в такую игру. Вначале в каждой из 2022 коробок лежит по одной спичке. За один ход можно переложить все спички из любой непустой коробки в любую другую непустую коробку. Ходят по очереди, начинает Петя. Побеждает тот, после хода которого в какой-то коробке впервые окажется не меньше половины всех спичек. Кто победит при правильной игре?* (И. Рубанов)

Ответ. Вася. Решение. Заметим, что неважно, перекладывать спички из коробки А в коробку Б или из Б в А: в обоих случаях одна из коробок становится пустой, а в другой оказываются все спички, лежавшие в обеих коробках. Первым ходом Петя добавляет одну спичку в какую-то коробку. Отметим эту коробку и будем считать, что в дальнейшем если эта коробка участвует в перекладывании, то спички добавляются в неё. Вася своим первым ходом также добавляет спичку в отмеченную коробку. Далее Вася играет так: если Петя своим очередным ходом добавляет спичку в отмеченную коробку, тоже добавляет туда спичку, а если Петя создал коробку с двумя спичками, перекладывает в отмеченную коробку обе эти спички. При такой игре после k-го хода Васи в отмеченной коробке будет $2k+1$ спичек, а в остальных — не больше, чем по одной спичке, а после k-го хода Пети в отмеченной коробке будет $2k$ или $2k-1$ спичек, а в остальных — не больше, чем по две спички. Тогда после 505-го хода Васи в отмеченной коробке окажется 1011 спичек, и он выиграет, так как до этого ни в какой коробке не лежало больше, чем $2 \cdot 505 = 1010$ спичек.

5. *Делители натурального числа n (включая n и 1), имеющего больше трёх делителей, выписали по возрастанию: $1 = d_1 < d_2 \ldots < d_k = n$. Разности $u_1 = d_2-d_1$, $u_2 = d_3-d_2$, …, $u_{k-1} = d_k-d_{k-1}$ оказались такими, что $u_2-u_1 = u_3-u_2 = \ldots = u_{k-1}-u_{k-2}$. Найдите все такие n.* (С. Берлов)

Ответ. 10. Решение. Пусть n нечётно. Тогда $u_{k-1} = d_k-d_{k-1} \geq n-n/3 = 2n/3$. При этом $u_{k-2} = d_{k-1}-d_{k-2} < d_{k-1} \leq n/3$, поэтому $u_{k-1}-u_{k-2} > n/3$, но $u_{k-1}-u_{k-2} = u_{k-2}-u_{k-3} < u_{k-2} < n/3$ — противоречие. В случае чётного n получится $u_{k-1} = d_k-d_{k-1} = n/2$, $u_{k-2} = d_{k-1}-d_{k-2} = n/2-d_{k-2}$, поэтому $u_{k-1}-u_{k-2} = d_{k-2}$. Но $u_2-u_1 = d_3-2d_2+d_1 = d_3-3$, что может быть равно d_{k-2} только при $k = 4$. Тогда $d_{k-2} = d_2 = 2$, $d_3 = n/2 = d_2+3 = 5$ и $n = 10$.