Второй тур дистанционного этапа XV олимпиады имени Леонарда Эйлера
Решения задач

1. *Вася расставил по кругу все натуральные числа от 1 до 100 в каком-то порядке. Скажем, что число* ***хорошо стоит****, если соседнее с ним число по часовой стрелке больше, чем соседнее с ним число против часовой стрелки. Могло ли оказаться, что хорошо стоят по крайней мере 99 чисел?*(А. Голованов, И. Рубанов)

Ответ. Не могло. Первое решение. Раскрасим числа в черный и белый цвета так, чтобы цвета чередовались. Тогда не будут хорошо стоять черное число, у которого соседним по часовой стрелке будет наименьшее белое число, и белое число, у которого соседним по часовой стрелке будет наименьшее черное число, так что всего хорошо стоящих чисел не больше 98. Второе решение. Рассмотрим число x, после которого по часовой стрелке идет единица. Оно не хорошо стоящее. Допустим, остальные числа стоят хорошо. Тогда после единицы по часовой стрелке идет число, не меньшее, чем $x+1$, за ним – какое-то хорошо стоящее число y, после которого идет число, не меньшее, чем $x+2$ и т. д. Сделав 49 таких шагов, мы получим число, не меньшее, чем $x+49$, после которого идет какое-то число z, а за ним – x. Но тогда получается, что число z – не хорошо стоящее, и, следовательно, хорошо стоящих чисел не более 98. Замечание. Ровно 98 хорошо стоящих чисел получится, если записать по часовой стрелке все числа от 1 до 100 в порядке возрастания: хорошо стоящими будут все числа, кроме 1 и 100.

2. *Даны три положительных числа: a, b, c. Петя записал на доске числа $\frac{1}{a}+bc, \frac{1}{b}+ac, \frac{1}{c}+ab$, а Вася — числа $2a^2$, $2b^2$, $2c^2$. Оказалось, что оба записали одни и те же три числа (возможно, в разном порядке). Чему равно произведение abc?* (Н. Агаханов)

Ответ. 1. Первое решение. Перемножая выражения $\frac{1}{a}+bc, \frac{1}{b}+ac, \frac{1}{c}+ab$, получаем в произведении $\frac{(abc+1)^3}{abc}$, а перемножая $2a^2$, $2b^2$, $2c^2$ — $8(abc)^2$. По условию полученные произведения равны. Приравняв их и умножив обе части равенства на abc, получаем $8(abc)^3 = (abc+1)^3$, откуда $2abc = abc+1$ и $abc = 1$. Второе решение. Пусть $a \ge b \ge c$ (другие случаи аналогичны). Тогда, как легко видеть, $\frac{1}{a}+bc \le \frac{1}{b}+ac \le \frac{1}{c}+ab$. С другой стороны, $2a^2 \ge 2b^2 \ge 2c^2$. Отсюда $\frac{1}{c}+ab = 2a^2$, $\frac{1}{b}+ac = 2b^2$, $\frac{1}{a}+bc = 2c^2$. Умножив первое равенство на c, второе — на b, третье — на a, получаем, что $abc+1 = 2a^2c = 2b^3 = 2c^2a$, откуда $a = c = b$ и $abc+1 = a^3+1 = 2a^3$, то есть $a = c = b = 1$ и $abc = 1$.

3. *Остаток от деления натурального числа n на 2021 на 800 больше, чем остаток от деления числа n на 2020. Найдите наименьшее такое n.* (А. Голованов)

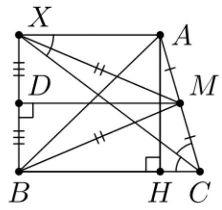
Ответ. $2020\cdot1221 = 2\,466\,420$. Решение. Пусть для натурального числа m выполнено условие задачи. Тогда для некоторых d_1, d_2, d_3 и r выполнено равенство $m = 2020d_1+r = 2021d_2+r+800$. Но в этом случае выполнено и равенство $m–r = 2020d_1 = 2021d_2 +800$, так что число $m–r$ тоже удовлетворяет условию задачи. Значит, искомое наименьшее число n делится на 2020, а при делении на 2021 дает остаток 800.

Заметим, что $2020d = 2021d–d = 2021(d–1)+(2021–d)$. Из этого следует, что число $2020d$ при $d \le 2021$ дает при делении на 2021 остаток $2021–d$. С ростом d этот остаток убывает, становясь равным 800 при $d = 1221$. Поэтому наименьшее число, кратное 2020, которое при делении на 2021 дает остаток 800, равно $2020\cdot1221$.

4. *На клетчатую доску размером 100х100 поставили 1975 ладей (каждая ладья занимает одну клетку, разные ладьи стоят на разных клетках). Какое наибольшее количество пар ладей, бьющих друг друга, могло при этом получиться? Напомним, что ладья может бить на любое число клеток по горизонтали и вертикали, но не бьёт ладью, загороженную другой ладьёй.* (И. Рубанов)

Ответ. 3861. Решение. По очереди удалим из доски 100х100 вертикали и горизонтали, в которых нет ладей, каждый раз сплачивая края удаленной полоски. Получим прямоугольник π, в каждой вертикали и каждой горизонтали которого есть хотя бы по одной ладье (очевидно, количество пар ладей, бьющих друг друга, при этом не изменится). Пусть в нём a горизонталей и b вертикалей. Заметим, что если в горизонтали или вертикали стоит $k > 0$ ладей, то в ней ровно $k–1$ пара ладей, бьющих друг друга. Суммируя по всем горизонталям и вертикалям, получаем, что количество пар бьющих друг друга ладей равно $1975\cdot2–(a+b)$ (*). При этом площадь прямоугольника π не меньше числа ладей. Получаем, что $a+b \ge 2\sqrt{ab} \ge 2\sqrt{1975} > 2\sqrt{1936} = 88$, откуда $a+b \ge 89$. Таким образом, количество пар бьющих друг друга ладей не больше, чем $1975\cdot2–89 = 3861$. Чтобы получить пример, когда их ровно 3861, достаточно произвольным образом расставить 1975 ладей в некотором прямоугольнике размером 45х44. Это возможно, так как $45\text{х}44 = 1980 > 1975$.

5. *BM — медиана остроугольного треугольника ABC. Биссектриса угла C пересекает прямую, проходящую через A параллельно BC, в точке X. Оказалось, что BM = MX. Докажите, что BC > AC.* (С. Берлов)



Решение. Проведем в треугольнике *ABC* высоту *AH*. Утверждение задачи немедленно вытекает из равенства *AC* = *BH*, которое мы и будем доказывать. Проведем медиану *MD* равнобедренного треугольника *BMX*. Она является средней линией трапеции (или параллелограмма) *AXBC*, и потому параллельна прямым *BC* и *AX*. Так как эта медиана является в *BMX* также и высотой, прямая *BX* перпендикулярна ей, а потому и прямым *BC* и *AX*. Следовательно, *BXAH* — прямоугольник, откуда *BH* = *AX*. С другой стороны, $\angle CXA = \angle XCB = \angle XCA$, откуда *AC* = *AX* = *BH*, что нам и требовалось.