Третий тур дистанционного этапа XV олимпиады имени Леонарда Эйлера. Решения задач

№1. На тренировке спортсмен преодолел 60 км за 3,5 часа. Сначала он плыл со скоростью 8 км/ч, потом бежал со скоростью 16 км/ч, а затем ехал на велосипеде со скоростью 24 км/ч. Что он делал дольше — плыл или ехал на велосипеде? (И. Рубанов)

Ответ. Ехал на велосипеде.

Решение. Пусть спортсмен плыл a часов, бежал b часов, ехал на велосипеде c часов. За 3,5 часа он преодолел $8a + 16b + 24c = 16(a + b + c) + 8(c - a) = 16 \cdot 3,5 + 8(c - a) = 60$ км. Получается, что $c - a = 0{,}5$, откуда $c > a$.

№2. В каждую клетку таблицы размером 6×6 записали некоторое положительное число (не обязательно целое). Оказалось, что в любой фигурке из четырёх клеток таблицы в форме буквы «Г» произведение всех стоящих там чисел равно 100. В левом верхнем углу стоит число 2. Какое число стоит в правом верхнем углу (укажите все возможности)? (П. Кожевников)

Ответ. 5.

Решение. Рассматривая две фигурки с совпадающими прямоугольниками 1×3 и противоположно направленными прямоугольниками 1×2, легко убедиться, что два числа, стоящие в одной строке или одном столбце через одно, равны. Пусть в левом верхнем квадрате 2×2 записаны числа a и b (в верхней строке) и c и d (в нижней строке). Тогда чётные (снизу вверх) строки таблицы имеют вид $ababab$, а нечётные — $cdcdcd$.

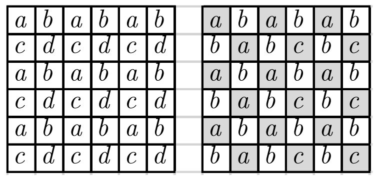

Рис. 1

Нетрудно подобрать две фигурки, в одной из которых стоят буквы a, c, d, c, а в другой — буквы b, d, b, a. Отсюда $ac^2d = ab^2d \Rightarrow c^2 = b^2 \Rightarrow c = b$. Аналогично доказывается, что $a = d$. Таким образом, если раскрасить клетки таблицы в шахматном порядке, то в клетках одного цвета будут стоять числа a, а в клетках другого цвета — числа b, и $100 = a^2b^2$. При этом одно из чисел (пусть a) по условию равно 2, откуда $b^2 = 25$ и $b = 5$. А так как левый и правый верхние углы доски — разных цветов, то в правом верхнем стоит $b = 5$.

№3. В треугольнике ABC, у которого угол B меньше 120 градусов, медиана BD короче половины стороны AB. Докажите, что эта медиана длиннее половины стороны BC. (И. Рубанов)

Решение. Допустим, что $BD \leqslant BC/2$. Обозначим через E середину стороны AB. В треугольнике BDE $BE = AB/2$, $DE = BC/2$. Значит, BD — наименьшая сторона треугольника BDE, а угол BED — наименьший угол в этом треугольнике. Следовательно, $\angle BED < 60^\circ$ (равняться 60° он не может, так как тогда треугольник BDE был бы равносторонним, что противоречит неравенству $BD < BE$), откуда $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = \angle EBD + \angle BDE = 180^\circ - \angle BED >$ $> 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Противоречие.

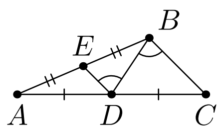

Рис. 2

№4. Существуют ли такие 2022 натуральных числа, что среди них нет одинаковых и произведение любых 1012 из них делится на произведение остальных 1010? (И. Рубанов)

Ответ. Существуют.

Первое решение. Подойдут числа $2022!$, $2022!/2$, $\ldots$, $2022!/2022$. Произведение любых 1012 из них делится на $(2022!)^{1011}$, а произведение любых 1010 из них является делителем числа $(2022!)^{1010}$, а, значит, и числа $(2022!)^{1011}$.

Второе решение. Подойдёт любой набор чисел вида 2^n, 2^{n+1}, $\ldots$, 2^{n+2021}, где $n \geqslant 510\,050$. Произведение любых 1012 из них — степень двойки, не меньшая, чем $2^{n+(n+1)+\ldots+(n+1011)} = 2^{1012n+1011\cdot 1012/2}$, а произведение любых 1010 — степень двойки, не большая, чем $2^{(n+1012)+\ldots+(n+2021)} = 2^{1010n+3033\cdot 1010/2}$. Решая неравенство $1012n + 1011 \cdot 1012/2 >$ $> 1010n + 3033 \cdot 1010/2$, получаем $n > 510\,049{,}5$, откуда и вытекает утверждение, сделанное в начале решения, так как любая степень двойки делится на любую меньшую степень двойки.

№5. В белом клетчатом квадрате размером 10×10 клеток закрасили черным 84 клетки. Какое наименьшее количество «уголков» из трех черных клеток могло при этом образоваться? (И. Рубанов)

Ответ. 132.

Решение. На бесконечной клетчатой плоскости каждая клетка, как легко проверить, принадлежит 12 различным «уголкам». Заметим, что каждый «уголок» получается удалением одной клетки из некоторого квадрата 2×2. В клетчатом квадрате 10×10 содержится 81 клетчатый квадрат 2×2: по 9 квадратов в каждой горизонтальной полосе шириной 2. Из каждого такого квадрата можно получить удалением одной клетки четыре «уголка». Стало быть, всего в квадрате 10×10 содержится $81 \cdot 4 = 324$ «уголка».

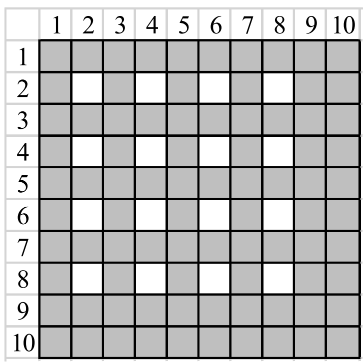

Рис. 3

Покрасим весь квадрат 10×10 в чёрный цвет, а затем перекрасим 16 клеток в белый, чтобы оставить 84 чёрных клетки. При этом перекрашивание каждой клетки уменьшит количество чёрных «уголков» не больше, чем на 12, поэтому в итоге чёрных «уголков» останется не меньше, чем $324 - 12 \cdot 16 = 132$. Осталось заметить, что если мы перекрасим в белый цвет 16 клеток на пересечениях столбцов с номерами 2, 4, 6, 8 со строками с такими же номерами, то каждая из этих клеток уничтожит ровно 12 чёрных «уголков», и их останется ровно 132.