**Всесибирская открытая олимпиада котов 2022-2023 г.г. по математике**

**Заключительный этап**

**10 класс. Решения.**

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

**10.1.** Найдите все пары натуральных чисел $x \geq 2, y \geq 2$ такие, что остаток от деления числа $3x$ на $y$ равен 1, остаток от деления числа $3y$ на $x$ равен 1 и остаток от деления числа $xy$ на 3 тоже равен 1.

**Ответ.** Четыре решения $x=2, y=5$, $x=5, y=2$.

**Решение.** Числа $x$ и $y$ не могут быть равны, иначе остаток от деления числа $3x$ на $y$ был бы равен 0. Значит, в силу симметрии можно считать $x<y$, поэтому $3x-1<3y$ и $3x-1$ делится на $y$, откуда $3x-1=y$ или $3x-1=2y$.

В первом случае $3y-1=9x-4$ делится на $x$, значит и 4 делится на $x$, следовательно $x=2, y=5$ или $x=4, y=11$. В первом случаях остаток от деления числа $xy$ на 3 равен 1, поэтому он удовлетворяют условию задачи. Во втором случае остаток от деления числа $xy$ на 3 равен 2, поэтому он не удовлетворяют условию задачи.

Во втором случае $2(3y-1)=6y-2=9x-5$ делится на $x$, значит и 5 делится на $x$, следовательно $x=5, y=7$. Но в этом случае остаток от деления числа $xy$ на 3 равен 2 и пара $x=5, y=7$ не удовлетворяет условию.

**Критерии оценивания.** (●) Подбором найдены верные решения: 1 балл за $x=2, y=5$, и один балл за $x=5, y=2$: итого 2 балла. (●) Замечено, что $3x-1=y$ или $3x-1=2y$: 2 балла. (●) Верно разобран первый из этих случаев: 3 балла. Верно разобран второй из этих случаев: 2 балла.

**10.2.** Вася и Петя играют в «Бери или дели». В этой игре сначала есть одна большая куча камней. Каждым ходом очередной игрок либо делит одну из уже имеющихся к моменту его хода куч любым способом на две меньших, либо забирает одну из уже имеющихся куч. Выигрывает игрок, после хода которого камней на поле вообще не останется. Игроки делают ходы по очереди, первым ход делает Вася, но этим и только этим ходом он не имеет права забрать всю кучу сразу. Кто из них победит в этой игре? Замечание: куча может содержать всего один камень.

**Ответ.** Всегда победит Вася.

**Решение.** Пусть к моменту, когда игра закончится, обоими игроками было сделано $\boldsymbol{x}$ ходов типа взятия кучки и $\boldsymbol{y}$ ходов типа деления кучки на две. Каждый ход первого типа уменьшает число имеющихся на поле кучек на один, а каждый ход второго типа увеличивает это число на один. В начале была одна кучка, а в конце – ноль, поэтому имеем соотношение $\boldsymbol{1+y-x=0}$, откуда $\boldsymbol{x=y+1}$. Общее количество сделанных при этом ходов равно $\boldsymbol{x+y=2y+1}$ – нечётно, следовательно, последний ход сделал первый игрок, то есть Вася, он и победил. Ответ не зависит от количества камней в начале.

**Критерии оценивания.** (●) На основании рассмотрения частных случаев заявлен правильный ответ: 1 балл. (●) Верный ответ доказан для какой-либо бесконечной серии значений количества камней в куче: 2 балла (не суммируется с предыдущим). (●) Присутствует идея рассмотрения суммы ***x+y***: 1 балл.

**10.3.** Докажите, что для любых действительных чисел $x, y$ из интервала $[0,\frac{\pi}{2}]$, произведение которых не больше 1, выполняется неравенство $Sin\ xy \geq Sin\ x \cdot Sin\ y$.

**Доказательство.** Ввиду того, что по условию $xy \leq 1$, одно из этих чисел не больше 1, будем считать $x \leq 1$. Функция $y = Sin\ x$ на интервале $[0,\frac{\pi}{2}]$ возрастает и выпукла вверх, поэтому любая точка её графика расположена выше отрезка, соединяющего точки с координатами $(0,0)$ и $(y, Sin\ y)$. В таком случае, точка $(xy, x \cdot Sin\ y)$ лежит ниже точки $(xy, Sin\ xy)$, следовательно, $x \cdot Sin\ y \leq Sin\ xy$. Кроме того, на интервале $[0,\frac{\pi}{2}]$ выполнено неравенство $Sin\ x \leq x$, поэтому $Sin\ x \cdot Sin\ y \leq x \cdot Sin\ y \leq Sin\ xy$, что и требовалось доказать.

**Критерии оценивания.** (●) Есть упоминание выпуклости функции $y = Sin\ x$ на интервале $[0,\frac{\pi}{2}]$: 1 балл. (●) Есть идея рассмотрения отрезка соединяющего точки с координатами $(0,0)$ и $(y, Sin\ y)$ и замечено, что этот отрезок ниже графика: 1 балл. (●) Есть идея рассмотрения точки $(xy, x \cdot Sin\ y)$: 1 балл (●) Есть упоминание неравенства $Sin\ x \leq x$: 1 балл.

**10.4.** Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка P такая, что углы PAC и PBC равны. Пусть M – середина стороны AB, а точки K и L – основания перпендикуляров, опущенных из P на стороны AC и BC соответственно. Докажите, что длины отрезков MK и ML равны.

**Доказательство.** Обозначим за T и S середины отрезков AP и BP соответственно, и докажем равенство треугольников MTK и MSL с соответственными сторонами MK и ML.Действительно, отрезки MT и MS являются средними линиями в треугольнике ABP, параллельными сторонам BP и AP соответственно, поэтому их длины равны половинам длин BP и AP. Отрезки KT и SL являются медианами, проведёнными к гипотенузе в прямоугольных треугольниках APK и BSL соответственно, поэтому их длины равны половинам длин AP и BP. Таким образом. в треугольниках MTK и MSL равны пары смежных сторон MT, KT и SL,SM.

Докажем равенство углов MTK и MSL. Они состоят из углов MTP и KTP, MSP и PSL соответственно. Углы MTP и MSP равны, как противоположные углы параллелограмма MTPS. Углы KTP и PSL, как углы между гипотенузами и медианами к ним в подобных прямоугольных треугольниках

АРК и BPL, равны удвоенным углам PAK=PAC и PBL=PBC, равным по условию. Следовательно, равны углы МТК и MSL, а с ними и треугольники МТК и MSL. Значит, равны их соответствующие стороны МК и ML, что и требовалось доказать.

**Критерии оценивания.** (●) Есть идея рассмотрения середин отрезков АР и ВР: 1 балл. (●) Высказана идея равенства треугольников МТК и MSL: 1 балл. (●) Доказаны равенства длин соответствующих сторон этих треугольников: 2 балла. (●) Доказано равенство углов МТК и MSL: 3 балла. (●) За найденные вписанные четырехугольники (2шт) и продвижение по задаче далее (это даёт равенство углов, через него можно выйти на равенство/подобие треугольников) давался 1 балл.

**10.5.** Какое максимальное количество подмножеств из 4 элементов можно выбрать во множестве из 8 элементов так, чтобы пересечение любых трёх из выбранных подмножеств содержало не более одного элемента?

**Ответ.** Восемь.

**Решение.** Приведём два различных примера выбора восьми 4-х элементных подмножеств во множестве X из восьми элементов, удовлетворяющих условию задачи. Оба примера строятся, как геометрические объекты.

Пример 1. Будем считать элементы X вершинами единичного куба, шесть из выбранных множеств будут гранями этого куба, а оставшиеся два – вершинами двух вписанных в этот куб правильных тетраэдров с ребром $\sqrt{2}$. Никакие две вершины этих тетраэдров не лежат на одном ребре куба.

Если среди любых трёх из выбранных подмножеств содержатся оба тетраэдра, либо две параллельных грани, пересечение пусто. Если это две смежных грани и тетраэдр, то пересечение граней даст ребро, которое пересекается с тетраэдром ровно по одной вершине. Если это три попарно смежных грани, то их пересечение содержит единственную вершину - вершину трёхгранного угла, образуемого этими гранями.

Пример 2. Будем считать элементы X вершинами правильного восьмиугольника. Занумеруем его вершины по часовой стрелке от 1 до 8, отметим четырёхугольник М с вершинами под номерами 1,2,3,5. Выбранными подмножествами будем считать М и ещё семь четырёхугольников, получаемых из М поворотами на углы $\frac{2\pi k}{8}, k = 1,2,...,6,7$.

Если бы пересечение каких-то трёх из них содержало не меньше двух вершин, то есть некоторую сторону или диагональ восьмиугольника, отличную от главных, то, повернув все эти три четырёхугольника обратно до совмещения с М, получим три различных отрезка одинаковой длины, соединяющие вершины М. Последнее невозможно, потому, что длины сторон и диагоналей М, измеренных в сторонах, равны 1,1,2,2,3,4, среди них не более двух равных. Если речь идёт о главной диагонали длины 4, то очевидно, что она содержится только в двух из восьми рассматриваемых четырёхугольниках.

Докажем, что, если в 8-ми элементном множестве X произвольно выбраны девять 4-х элементных подмножеств, то пересечение некоторых трёх из них содержит больше одного элемента. Сумма мощностей выбранных подмножеств равна 36, поэтому один из элементов X, обозначим его за $\boldsymbol{x}$, содержится не менее, чем в $k \geq 5$ из них. Удалим из этих $k$ подмножеств $\boldsymbol{x}$ и рассмотрим $k \geq 5$ полученных 3-х элементных подмножеств в 7-элементном множестве Y, равном X без $\boldsymbol{x}$. Сумма мощностей полученных множеств больше, либо равна 15. поэтому один из элементов Y, обозначим его за $\boldsymbol{y}$, содержится не менее, чем в трёх из $k$ полученных 3-ёх элементных множеств. Следовательно, пара элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ содержится не менее, чем в трёх из девяти выбранных 4-х элементных подмножеств из X.

**Критерии оценивания.** (●) Пример для восьми подмножеств: 3 балла. (●) Доказательство оценки: 4 балла. (●) Отсутствие обоснования примера: минус 1 балл.