

**Всесибирская открытая олимпиада котов 2022-2023 г.г. по математике**  
**Заключительный этап**

**11 класс. Решения.**

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красоты, оценивается в 7 баллов

**11.1.** В треугольнике ABC биссектрисы углов BAC и BCA пересекают стороны BC и AB в точках K и P соответственно. Известно, что длина стороны AC равна сумме длин отрезков AP и CK. Найдите величину угла ABC.

**Ответ.**  $60^\circ$ .

**Решение 1.** Обозначим величины углов треугольника ABC соответствующими им буквами A, B и C, а точку пересечения биссектрис за I. Отразим точки P и K относительно биссектрис AK и CP соответственно, их образами будут точки P' и K' на стороне AC такие, что  $AP' = AP$ ,  $CK' = CK$ . Ввиду равенства  $AP' + CK' = AP + CK = AC$  точки P' и K' совпадают, обозначим эту точку за M. Величины углов  $AMI = API = APC = 180^\circ - A - C/2$ ,  $SMI = SKI = SKA = 180^\circ - C - A/2$ . Их сумма равна  $360^\circ - 3(A+C)/2 = 360^\circ - 270^\circ + 3B/2 = 90^\circ + 3B/2 = 180^\circ$ , откуда  $B = 60^\circ$ . Значит, величина угла ABC равна  $60^\circ$ .

**Решение 2.** Обозначим длины сторон AB, BC, AC треугольника за  $c, a, b$  соответственно и найдём длины всех используемых в задаче отрезков, используя свойство биссектрисы. Тогда  $AP = \frac{bc}{a+b}$ ,  $CK = \frac{ab}{b+c}$ , откуда

$$AP + CK = \frac{bc}{a+b} + \frac{ab}{b+c} = \frac{b^2c + bc^2 + a^2b + ab^2}{ab + ac + bc + b^2} = AC = b. \text{ Сократим обе части на } b,$$

умножим на знаменатель, приведём подобные, получим:  $b^2 = a^2 + c^2 - ac$ . По теореме косинусов  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$ , откуда  $\cos B = \frac{1}{2}$  и  $B = \angle ABC = 60^\circ$ .

**Критерии оценивания.** В первом решении (●) Присутствует идея отражения точек P и K относительно биссектрис AK и CP: 1 балл, (●) Показано, что образы при таком отражении дадут общую точку на стороне AC: ещё 1 балл. Во втором решении (●) Найдены AP и CK: 3 балла. (●) Получено равенство  $b^2 = a^2 + c^2 - ac$ : ещё 2 балла. (●) Отсюда получен  $\cos B = \frac{1}{2}$ : 2 балла.

(●) Рассмотрен частный случай при определенном расположении радиусов: 2 балла.

**11.2.** Тройка действительных чисел  $A, B, C$  такова, что  $\sin A + \sin B + \sin C = 0$  и  $\cos A + \cos B + \cos C = 0$ . Найти значение выражения  $\cos(A-B) + \cos(B-C) + \cos(C-A)$ .

**Ответ.**  $-\frac{3}{2}$ .

**Решение.** Возведём два первых выражения в квадрат, получим  $(\sin A + \sin B + \sin C)^2 = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2(\sin A \cdot \sin B + \sin B \cdot \sin C + \sin A \cdot \sin C) = 0$

и  $(\cos A + \cos B + \cos C)^2 = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2(\cos A \cdot \cos B + \cos B \cdot \cos C + \cos A \cdot \cos C) = 0$ . Складывая полученные выражения, имеем

$$3 + 2(\sin A \cdot \sin B + \sin B \cdot \sin C + \sin A \cdot \sin C + \cos A \cdot \cos B + \cos B \cdot \cos C + \cos A \cdot \cos C) = 0.$$

Учитывая равенства

$$\sin A \cdot \sin B + \cos A \cdot \cos B = \cos(A - B), \sin A \cdot \sin C + \cos A \cdot \cos C = \cos(C - A), \text{ и}$$

$$\sin B \cdot \sin C + \cos B \cdot \cos C = \cos(B - C), \text{ получим}$$

$$3 + 2(\cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A)) = 0, \text{ откуда}$$

$$\cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A) = -\frac{3}{2}.$$

**Критерии оценивания.** (●) Возведение равенств из условия в квадрат: 2 балла. (●) Сложение полученных выражений: 1 балл. (●) Использование формул косинуса разности: 3 балла.

**11.3.** Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} x^5 = y^3 + 2z, \\ y^5 = z^3 + 2x, \\ z^5 = x^3 + 2y. \end{cases}$$

**Ответ.** Три решения:  $(0,0,0), \pm(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

**Решение.** 1. Найдём легко угадываемые решения системы, когда значения всех переменных равны между собой, то есть когда  $x = y = z$ . Тогда  $x^5 - x^3 - 2x = 0$ , откуда  $x = 0$  или  $x = \pm\sqrt{2}$ . Это и приводит к трём указанным в ответе решениям  $(0,0,0), \pm(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ . Докажем, что других решений нет.

2. В любом решении все переменные одного знака, они либо неотрицательны, либо не положительны. Это следует из того, что нечётная степень числа имеет тот же знак, что и само число. Действительно, среди переменных две имеют одинаковый знак, тогда правая часть уравнения, содержащего эти переменные, имеет тот же знак, значит и левая часть, а с ней и третья переменная имеют тот же знак. Кроме того, если одна из переменных равна 0, то левая часть соответствующего уравнения равна 0, значит сумма двух чисел одного знака в правой части тоже равна 0, поэтому каждое из этих чисел равно 0. Следовательно, дальше можно считать, что все переменные не равны 0. При умножении решения системы на  $-1$  снова получаем решение, следовательно, дальше можно считать, что  $x, y, z > 0$ .

3. Рассмотрим поведение функции  $f(x) = x^5 - x^3 - 2x$  при  $x \geq 0$ . Используя разложение  $f(x) = x^5 - x^3 - 2x = x(x^2 + 1)(x^2 - 2)$ , мы видим, что значение функции равно 0 при  $x = 0$  и  $x = \sqrt{2}$ , положительно при  $x > \sqrt{2}$  и отрицательно при  $0 < x < \sqrt{2}$ . Отсюда следует, что все переменные не могут быть одновременно больше или одновременно меньше  $\sqrt{2}$ . В противном случае, сложив все три уравнения, получим  $f(x) + f(y) + f(z) = 0$ . В левой части стоит сумма трёх чисел одного знака, поэтому они все должны равняться 0, откуда следует, что при этом  $x = y = z = \sqrt{2}$ . Итак, остались два случая,  $x > \sqrt{2} \geq y, z$  и  $x, y \geq \sqrt{2} > z$ .

4. Если  $x > \sqrt{2} \geq y, z$ , тогда  $x^5 - y^3 - 2z \geq x^5 - x^3 - 2x > 0$  - это не решение. Если  $x, y \geq \sqrt{2} > z$ , то  $z^5 - x^3 - 2y < z^5 - z^3 - 2z < 0$  - это тоже не решение. Таким образом доказано, что других решений, кроме уже найденных, нет.

**Критерии оценивания.** (●) Путём подбора найдены все три решения: 1 балл. (●) Доказано, что значения всех переменных решения имеют один знак: 2 балла. (●) Исключены случаи, когда все переменные одновременно больше или одновременно меньше  $\sqrt{2}$ : 2 балла.

**11.4.** В возрастающей арифметической прогрессии из  $n$  натуральных чисел каждый член, кроме последнего, делится на свой номер в прогрессии, а последний - нет. Докажите, что  $n$  является степенью некоторого простого числа.

**Доказательство.** Обозначим члены арифметической прогрессии за  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , а её разность - за  $d$ . Предположим противное, что  $n$  не является степенью простого числа, тогда  $n$  делится хотя бы на два различных простых числа. В таком случае,  $n$  можно представить в виде произведения двух взаимно простых чисел  $p$  и  $q$ , меньших  $n$ , где  $p > 1$  - максимальная степень первого из этих простых чисел, делящая  $n$ , а  $q = \frac{n}{p}$  - делится на второе из этих простых чисел и тоже больше 1. По условию,  $a_p = a_1 + d(p-1) = a_1 - d + dp$  делится на  $p$ , следовательно,  $a_1 - d$  делится на  $p$ . Аналогично,  $a_q = a_1 + d(q-1) = a_1 - d + dq$  делится на  $q$ , следовательно,  $a_1 - d$  делится на  $q$ . Из взаимной простоты  $p$  и  $q$  следует, что  $a_1 - d$  делится на произведение  $pq = n$ , значит и  $a_n = a_1 + d(n-1) = a_1 - d + dn$  делится на  $n$ , что противоречит условию.

**Критерии оценивания.** (●) Замечено и доказано, что, если  $n$  не является степенью простого числа, то его можно представить в виде произведения двух взаимно простых чисел: 2 балла. Если это замечено, но не доказано: 1 балл. (●) Есть замечание о том, что  $a_1 - d$  делится на  $p$  и  $q$ : 1 балл. (●) Доказано, со ссылкой на взаимную простоту  $p$  и  $q$ , что  $a_1 - d$  делится на произведение  $pq = n$ : 3 балла. Если явной ссылки на взаимную простоту нет: 1 балл. (●) Доказано, что отсюда следует, что  $a_n$  делится на  $n$ : 1 балл.

**11.5.** На одной стороне каждой из 100 карточек написали одно из натуральных чисел от 1 до 100 включительно (каждое число записано ровно на одной карточке), после чего перевернули их обратными сторонами вверх и разложили в произвольном порядке на столе. За один вопрос Вася может указать на две любые карточки, после чего получает от ведущего ответ, являются ли записанные на них числа соседними (отличающимися на 1). За какое минимальное число вопросов Вася может гарантированно назвать хотя бы одну пару карточек, на которых написаны соседние числа?

**Ответ.** За 98 вопросов.

**Решение.** Пусть Вася выберет какую-то карточку  $A$  и задаст 98 вопросов, в каждом из которых он спросит про  $A$  и одну из 99 карточек, отличных от  $A$ . Общее количество чисел, не соседних с числом, написанным на  $A$  не превосходит 98, если на  $A$  написано 1 или 100, и 97, если на  $A$  написаны числа от 2 до 99. Тогда либо в одном из 98 ответов будет дан положительный ответ, и Вася нашёл нужную пару соседних чисел, либо все эти карточки содержат числа, не соседние с числом на  $A$ . Следовательно, оставшаяся карточка содержит число, соседнее с числом на  $A$ . Таким образом, Васе достаточно 98 вопросов.

Докажем, что, если Вася задаст всего 97 любых вопросов, он может не найти ни одной пары карточек с соседними числами. Предположим противное, что задав некоторые 97 вопросов он смог точно указать на пару карточек с соседними числами. Переведём задачу на язык теории графов. Карточки будем считать вершинами графа  $\Gamma$ , а заданные Васей вопросы – рёбрами  $\Gamma$  (синими рёбрами), соединяющими соответствующие пары карточек. К этим рёбрам нужно добавить ещё одно, соответствующее той паре карточек, на которых написана пара соседних, по версии Васи, чисел. Теперь нужно доказать, что вершины  $\Gamma$  могут быть занумерованы в таком порядке, что ни одно ребро не соединяет две вершины с соседними номерами. То есть, нужно дорисовать в графе путь из 99 рёбер, проходящий последовательно по всем 100 вершинам, и не содержащих ни одного из 98 «Васино» синего ребра. Это будет означать, что Васина догадка не верна. Назовём такой путь *красным* и будем строить его методом математической индукции по числу вершин графа  $\Gamma$ .

Предположим, что в любом графе с числом вершин  $n \leq 99$ , в котором проведено не больше  $n-2$  синих рёбер, существует красный путь  $P$  по всем вершинам, не содержащий синих рёбер. Построим красный путь в  $\Gamma$ .

1) Пусть в  $\Gamma$  есть «крайняя» вершина  $v$ , из которой выходит ровно одно ребро  $e$ . В графе  $\Gamma'$ , полученном из  $\Gamma$  удалением вершины  $v$  и ребра  $e$  число вершин равно 99, а рёбер – не больше 97, выполнено предположение индукции, поэтому в  $\Gamma'$  можно построить красный путь длины 98 с началом в вершине  $a$  и концом в вершине  $b$ . Тогда ребро  $e$  не соединяет вершину  $v$  с одной из  $a$  или  $b$ , проведя красное ребро из  $v$  в эту вершину, получим красный путь длины 99 в  $\Gamma$ .

2) Пусть в  $\Gamma$  нет вершин, из которых выходит ровно одно ребро. В таком случае все синие рёбра инцидентны в сумме 196 вершинам степени не меньше 2 каждая, следовательно, среди них не больше 98 различных. Следовательно, в  $\Gamma$  не меньше двух вершин  $u, v$  из которых не выходит ни одного синего ребра. Удалим из  $\Gamma$  вершины  $u, v$  и два ребра, выходящие из некоторой четвёртой вершины  $s$  (но не саму вершину). Полученный граф  $\Gamma'$  снова удовлетворяет предположению индукции и в нём можно построить красный путь длины 97 с началом в вершине  $a$  и концом в вершине  $b$ . Если он не проходит через  $s$ , или проходит, но не проходит через удалённые рёбра, соединим  $a$  с  $u$  и  $b$  с  $v$  и получим красный путь в  $\Gamma$  длины 99.

В оставшихся случаях, обозначим за  $x$  и  $y$  вторые концы удалённых рёбер.

Если красный путь в  $\Gamma'$  проходит через  $x, s, y$ , заменим этот фрагмент на  $x, u, s, v, y$ . Если он проходит только через одно удалённое ребро, скажем, через  $x, s$ , заменим его на  $x, u, v, s$ . В обоих случаях получится красный путь в  $\Gamma$ .

База индукции - случаи графов с 3 и 4 вершинами - очевидна.

**Критерии оценивания.** (●) Приведён алгоритм отыскания пары карточек с соседними числами: 2 балла. Отсутствие обоснования – минус 1 балл. (●)

(●) При верно изложенном алгоритме неверный ответ 99 вопросов: 1 балл (●)

Верно сформулировано доказываемое по индукции утверждение о том, что при любых 98 отмеченных рёбрах можно построить цепь из 99 рёбер, не содержащую отмеченных: 1 балл. (●) Доказательство того, что количество вопросов не меньше 98: 5 баллов. Если при в целом верном индукционном доказательстве не рассмотрены существенные случаи – минус до 3 баллов.